



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

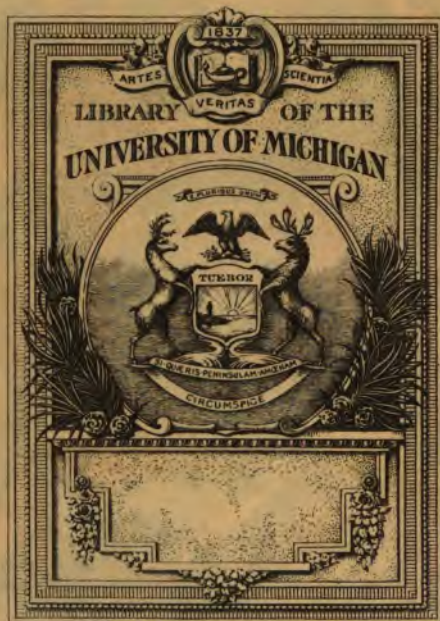
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



**NON
CIRCULATING**



QA

35

. L133

1765

INSTITUTIONS
DE
GÉOMÉTRIE,
ENRICHIES
DE NOTES CRITIQUES
ET PHILOSOPHIQUES

SUR LA NATURE ET LE DÉVELOPPEMENT
de l'Esprit humain :

*AVEC UN DISCOURS SUR L'ÉTUDE
des Mathématiques, où l'on essaie d'établir que les
Enfans sont capables de s'y appliquer, augmenté
d'une Réponse aux Objections qu'on y a faites.*

OUVRAGE UTILE, NON-SEULEMENT
à ceux qui veulent apprendre ou enseigner les
Mathématiques par la voie la plus naturelle, mais
encore à toutes les personnes qui sont chargées de
quelque Education.

*Par M. DE LA CHAPELLE, Censeur Royal,
de l'Académie de Lyon, de celle de Rouen,
& de la Société Royale de Londres.*

QUATRIÈME ÉDITION,

Revue, corrigée & augmentée par l'Auteur.

TOME SECOND.

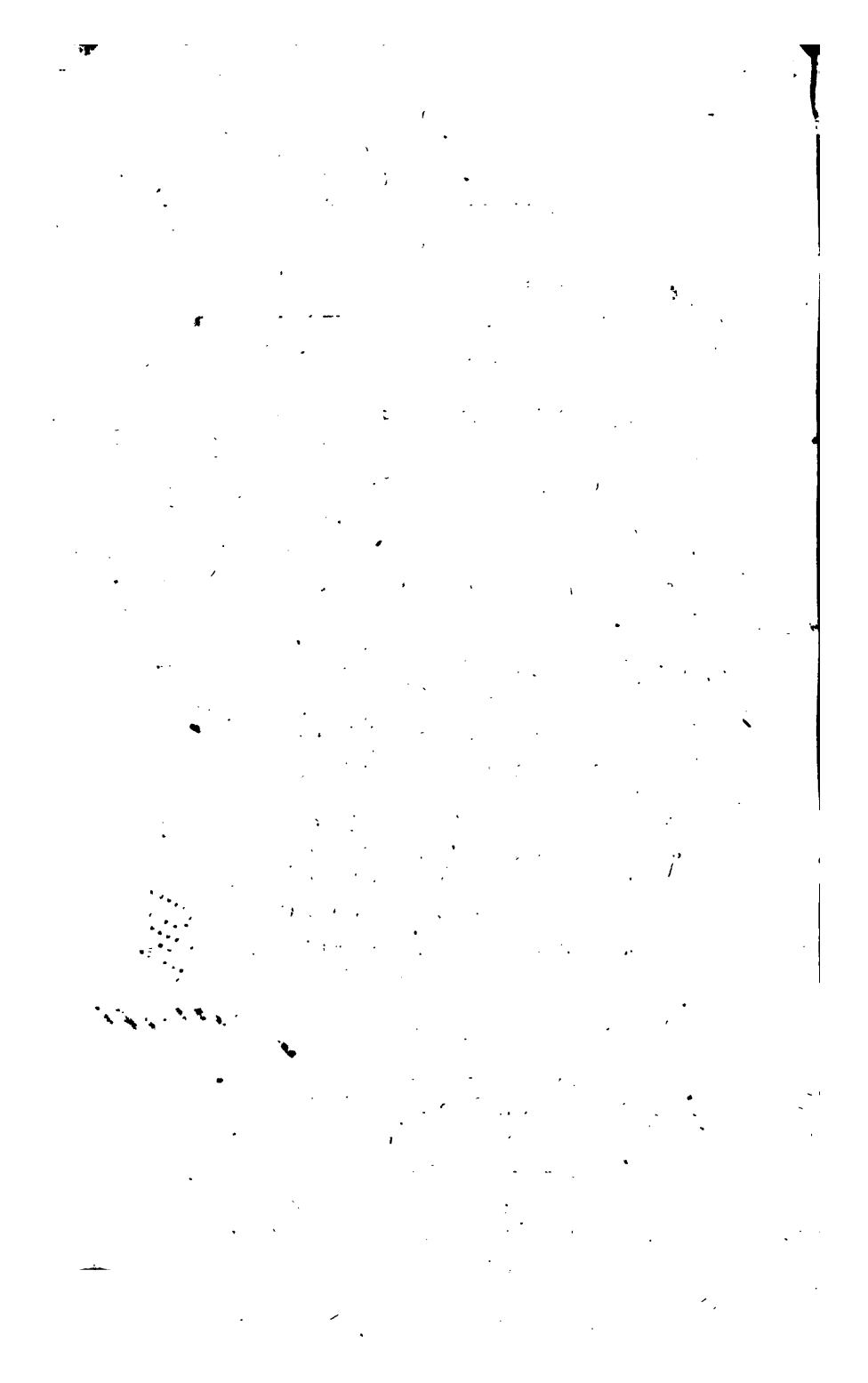


A PARIS,

Chez DEBURE Pere, Libraire, Quai des
Augustins, à l'Image S. Paul.

M. DCC. LXV.

Avec Approbation & Privilège du Roi.



T A B L E

DÉS CHAPITRES ET DES PRINCIPALES
Matières contenues dans le second Tome des
Institutions de Géométrie.

L I V R E I I.

CHAP. I. **P** RINCIPES de l'Arpentage. Mesure
des Terreins, pag. 1

Ce que l'on appelle Arpentage, ou mesure des Ter-
reins, 2

Histoire que l'on fait sur l'origine de l'Arpentage &
de la Géométrie, ibid. not. (a)

Proposition XIV. Deux Triangles dont tous les
côtés sont égaux, chacun à chacun, sont égaux
en surface, 3

Autre Démonstration de la Proposition XIV, 4

Méthode commode imaginée pour mesurer les Tri-
gles, 5

Ce que c'est qu'un Parallélogramme, ibid.

Problème LXVIII. Construire un Rectangle, dont
deux côtés contigus sont donnés, 7

Problème LXIX. Construire un Rhomboïde, ou un
Parallélogramme oblique plus long que large,
dont deux des côtés sont donnés, avec l'angle
compris entre ces côtés, 8

Problème LXX. Construire un Rhombe, ou un
Losange, avec une ligne donnée & un angle
donné, ibid.

Préparation à la mesure du Rectangle 9

Ce que c'est qu'une toise quarrée, un pied quarré,
une perche, un arpent, &c. ibid.

Problème LXXI. Déterminer la surface d'un Rec-
tangle qui a 8 toises de long sur 5 toises de
large, 10

IV TABLE DES CHAPITRES

Avantages & commodité du Rectangle , 11. not. (2)

TABLE des mesures les plus usitées dont on se sert dans l' Arpentage , ou la mesure des terrains , 12

Ce que c'est que la base & la hauteur d'un rectangle ,

Ibid.

Problème LXXII. Mesurer la surface d'un triangle rectangle ; dont la base = 7 pieds & la hauteur 3 ,

13

Pourquoi le Parallélogramme oblique ne sçauroit être pris pour servir de mesure commune à toutes les surfaces ;

14. not. (2)

Proposition XV. Le parallélogramme oblique est égal en surface à un parallélogramme rectangle de même base & de même hauteur ; c'est-à-dire , dont la base est égale à la base de l'oblique , & la hauteur égale à la hauteur de l'oblique ,

15

Proposition XVI. Deux parallélogrammes obliques qui ont des bases & des hauteurs égales , sont nécessairement égaux en surface , quoiqu'ils soient différemment inclinés ;

16

Proposition XVII. Les triangles dont les bases sont égales , & qui ont même hauteur , ont des surfaces égales ,

17

Problème LXXIII. Mesurer un Parallélogramme oblique , dont on peut parcourir l'intérieur ,

18

Des parallélogrammes égaux en surface n'ont pas nécessairement même base & même hauteur ,

19

Problème LXXIV. Déterminer l'aire ou la surface d'un triangle oblique ,

20

Des triangles qui ont des surfaces égales , n'ont pas nécessairement même base & même hauteur ,

22

Des triangles égaux en surface n'ont pas nécessairement tous leurs côtés égaux , chacun à chacun ,

Ibid.

Pourquoi certaines Propositions ont des converses , & pourquoi d'autres n'en ont pas ,

22. not. (2)

Problème LXXV. Evaluer la surface d'un trapèze , c'est-à-dire , d'une figure de quatre côtés , dont on en suppose deux parallèles ,

24

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. ▼

- Problème LXXVI. Mesurer un quadrilatère, dont un des angles est droit, 26
- Problème LXXVII. Trouver la surface d'un eptagone irrégulier, qui peut servir de modèle pour toutes les figures irrégulières, ibid.
- Problème LXXVIII. Trouver la surface d'une pièce de terre bornée par une rivière, dont la rive n'est pas en ligne droite, 27
- Problème LXXIX. Mesurer la surface d'un polygone régulier, par exemple, d'un salon hexagone, ou de tout autre polygone régulier, ibid.
- Problème LXXX. Changer une figure, telle qu'un triangle, en une autre figure qui ait un nombre quelconque de côtés, sans avoir néanmoins plus de surface que le triangle, 28
- Transformer un parallélogramme en une figure de cinq côtés de même surface que ce parallélogramme, 30
- Réduire une figure d'un nombre quelconque de côtés, en une autre qui en ait deux, trois, quatre, &c., de moins, pourvu qu'il ne soit pas question de la réduire en une figure qui ait moins de trois côtés, ibid.
- Proposition XVIII. Le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés construits sur les deux autres côtés d'un triangle rectangle, 32
- Si un triangle est tel, que le carré d'un de ses côtés soit égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés, ce triangle sera nécessairement rectangle, 36
- Lorsque l'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut toujours se convaincre s'il est rectangle, obtusangle ou acutangle, 36
- Problème LXXXI. Trouver la surface d'un Triangle isoscèle, acutangle ou obtusangle, dont on ne connoît que les trois côtés, 38
- Problème LXXXII. Déterminer la surface d'un triangle scalène, obtusangle ou acutangle, par

vj TABLE DES CHAPITRES

<i>la seule connoissance de ses trois côtés ,</i>	40
<i>Méthode d'approximation fort simple , & fort courte dans la pratique ,</i>	42 & 44. not. (2)
RÈGLE GÉNÉRALE pour le calcul des triangles scalènes , acutangles ou obtusangles , dont on cherche la surface , lorsque l'on n'en connoît que les trois côtés ,	45
Problème LXXXIII. Déterminer la longueur que l'on doit donner aux échelles , afin qu'elles soient proportionnées aux murailles que l'on se propose d'escalader ,	46
Problème LXXXIV. Trouver la surface d'un terrain irrégulier , dont on ne peut connoître que le circuit ou le contour ,	ibid.
<i>Premier moyen ,</i>	47
<i>Second moyen ,</i>	ibid.
<i>Troisième moyen ,</i>	48
<i>Quatrième moyen d'évaluer la surface d'un terrain inaccessible au dedans , sans qu'il soit nécessaire de connoître les angles qui la terminent ,</i>	50
Problème LXXXV. Lever le plan d'un terrain dont on peut parcourir l'intérieur ,	52
Problème LXXXVI. Trouver la surface d'un polygone régulier , par exemple , d'un bassin octogone rempli d'eau , sans entrer au dedans de ce polygone ,	53
Problème LXXXVII. Trouver la surface d'un cercle , au-dedans duquel il est libre de s'étendre ,	54
Problème LXXXVIII. Trouver la surface d'un cercle , dont on sçait que la circonférence contient dix pieds ,	56
Problème LXXXIX. Evaluer la surface d'un cercle , dont le diamètre = $\frac{11}{12}$ de pied ,	ibid.
Problème XC. Trouver la surface d'un secteur de cercle ,	57
Problème XCI. Moyen mécanique & géométrique de trouver le rayon d'un cercle ou d'un	

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. vij

*secteur , en supposant simplement que l'on puisse
appliquer quelque mesure sur une portion de la
circonférence ou du secteur ,* 58

Problème XCII. *Trouver la surface d'un segment
de cercle ,* 59

OBSERVATION *sur la mesure des surfaces ,* ibid.

*Cas où les inégalités d'un terrain doivent être con-
sidérées , ou bien , où l'on ne doit y avoir aucun
égard ,* 60

OBSERVATION *de Polybe au sujet de ces inéga-
lités. Elope du Commentaire que M. le Chevalier
de Folard a donné de cet Auteur ,* ibid. not. (2).

*En quoi ces inégalités du terrain sont surtout à con-
sidérer ,* 61. not. (2)

Problème XCIII. *Trouver la largeur du plan hori-
sontal par lequel on doit mesurer un côteau ,* 66

CHAPITRE II. *Du toisé des surfaces. Méthode
plus simple que celle dont on s'est servi dans le
Chapitre précédent. Exposition du principe de
cette méthode. Application à des exemples ,* 68

PREMIER EXEMPLE , *où l'on donne la manière de
toiser une surface dont la longueur contient des
toises , des pieds , des pouces , & la largeur ne
contient que des toises. On suppose qu'il s'agisse
de multiplier 3 toises 2.1 pied , 1 pouce , par
1 toise ,* 69

SECOND EXEMPLE *semblable au premier. On pro-
pose de multiplier 10 toises , 4. pieds , 8 pouces ,
par 5 toises ,* 71

TROISIÈME EXEMPLE. *Multiplier 59 toises , 2
pieds , 7 pouces , par 75 toises ,* 72

QUATRIÈME EXEMPLE. *On demande le produit
de 45 toises , 5 pieds , 11 pouces , 2 lignes , par
34 toises ,* 73

CINQUIÈME EXEMPLE *Quel est le produit de 15
toises , 5 pouces , par 18 toises ,* 76

SIXIÈME EXEMPLE *Déterminer le produit de*
2 iv

VIII TABLE DES CHAPITRES

25 toises, 3 pieds, 8 lignes, par 32 toises, 77

SEPTIÈME EXEMPLE. Trouver le produit de 13 toises, 5 lignes, par 19 toises, 79

HUITIÈME EXEMPLE, où les deux dimensions qui se multiplient, sont composées chacune de toises, pieds, pouces, &c. Multiplier 12 toises, 1 pied, 7 pouces 5 lignes, par 5 toises, 2 pieds, 9 pouces, 80

NEUVIÈME EXEMPLE. Trouver le produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toises, 4 pieds, 9 pouces, 82

DIXIÈME EXEMPLE. On demande quel est le produit de 16 toises, 2 pieds, 7 pouces, 3 lignes, par 8 toises, 2 pouces, 4 lignes, 83

ONZIÈME EXEMPLE. Déterminer le produit de 24 toises, 2 pouces, 6 lignes, par 10 toises, 4 lignes, 84

DOUZIÈME EXEMPLE, où l'on expose un moyen très-simple de vérifier un calcul, 86

CHAPITRE III. Du partage des terrains, 89

Problème XCIV. Diviser un triangle en autant de parties égales qu'il est nécessaire, ibid.

Problème XCV. Partager un parallélogramme en quatre parties égales, ou en tout autre nombre de parties égales qu'il en sera besoin, 90

Problème XCVI. Diviser en tant de parties égales que l'on voudra un trapèze, dont les deux côtés sont parallèles, ibid.

Problème XCVII. Partager un polygone régulier, par exemple, un pentagone, en 9 parties égales: ce qui peut servir de modèle pour le diviser en tant de parties égales que l'on voudra, 91

PRÉPARATION à la résolution du Problème, où toutes les divisions d'un terrain doivent partir d'un point déterminé, 93

Problème XCVIII. Diviser un terrain quelconque en autant de parties égales qu'il est nécessaire, à

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. ix

condition que toutes les divisions commenceront à un même point pris au-dedans de la figure, 94
OBSERVATION sur le partage des terrains, 96

LIVRE III.

Géométrie de l'Adolescence, où l'on traite des rapports & des proportions, 98

Pourquoi cette partie est appelée de ce nom? Ibid.

CHAPITRE I. Des rapports & des proportions numériques & algébriques, 99

Ce qu'on appelle rapport & raison, *ibid.*

Différence d'un rapport Arithmétique à un rapport Géométrique, *ibid.*

Ce que c'est qu'une raison composée, 100

Manière de bien juger de l'égalité de deux ou de plusieurs rapports, 101

DES PROPORTIONS, 103

Ce que c'est que proportion Géométrique & proportion Arithmétique, *ibid.*

Ce qu'on appelle proportion continuë, *ibid.*

Théorème fondamental & unique, dont on déduit toute la théorie des proportions. Dans une proportion Géométrique, le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens, 104

COROLLAIRE I. *Si l'on connoît trois termes d'une proportion Géométrique, le terme inconnu sera toujours facile à connoître,* 107

Usage de cette propriété pour démontrer la règle de Trois, *ibid.*

COROLLAIRE II. *Dans la proportion continuë, le produit des extrêmes est égal au carré de la moyenne,* 109

Problème. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux grandeurs,* *ibid.*

COROLLAIRE III. *On a beau changer la place des termes d'une proportion, la proportion subsistera, pourvu que les deux mêmes termes qui sont extrêmes, soient toujours ou moyens ou extrêmes,* 110

x TABLE DES CHAPITRES

COROLLAIRE IV. Dans une proportion Géométrique, ajoutez aux antécédents, ou retranchez-en ce que vous voudrez, pourvu que les grandeurs ajoutées ou retranchées soient en même rapport que les antécédents, il y aura toujours proportion ; dites la même chose des conséquents, 111

COROLLAIRE V. Si l'on multiplie ou si l'on divise les antécédents d'une proportion par une même grandeur, la proportion subsistera : on ne la détruira pas non plus, en multipliant ou en divisant ses conséquents par une même grandeur, 113

COROLLAIRE VI. Si l'on suppose deux proportions, en multipliant ou divisant par ordre chaque antécédent par chaque antécédent, & chaque conséquent par chaque conséquent, il y aura encore proportion, 114

Quand il y auroit plus de deux proportions, le Corollaire seroit toujours vrai, ibid.

Des grandeurs en proportion ont aussi leurs racines de même degré en proportion, 115

COROLLAIRE VII. Deux proportions dont les rapports de l'une sont égaux aux rapports de l'autre, donneront encore une proportion, si l'on ajoute par ordre les antécédents aux antécédents, & les conséquents aux conséquents, ou si l'on retranche ces mêmes grandeurs par ordre, 115

COROLLAIRE VIII. Dans une proportion continue, le carré du premier terme est au carré du second, comme le premier est au troisième, 117

COROLLAIRE IX. Si la proportion continue a quatre termes, le cube de la première est au cube de la seconde, comme la première est à la quatrième, ibid.

COROLLAIRE X. Lorsque l'on a une suite de raisons égales, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent, 118

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. x)

- DE LA PROPORTION *Arithmétique*, 119
 Ce que c'est, & comment on la marque, *ibid.*
 THÉORÈME II. Dans une proportion arithmétique la somme des extrêmes est toujours égale à la somme des moyens, 120
 Problème. Trois termes d'une proportion arithmétique étant donnés, trouver le quatrième, 121
 COROLLAIRE. Dans une proportion continue arithmétique la somme des extrêmes est égale au double de la moyenne, *ibid.*
 Problème. Trouver un moyen proportionné arithmétique entre deux nombres, 122
 DES LOGARITHMES, *ibid.*
 Ce que l'on appelle logarithmes, 123
 Le logarithme d'un produit est toujours égal à la somme des logarithmes des quantités qui ont concouru à former ce produit, *ibid.*
 Le logarithme du quotient de deux grandeurs divisées l'une par l'autre, est égal à la différence des logarithmes de ces grandeurs, *ibid.*
 Le logarithme d'une grandeur n'est que la moitié du logarithme de son carré, 124, 125
 Le logarithme d'un nombre n'est que le tiers du logarithme de son cube, 124, 125
 Usage des tables des logarithmes, 126
 Problème. Entre deux grandeurs données trouver deux moyennes proportionnelles, 127
 Problème. Si 100 livres de Venise pèsent 70 livres de Lyon, & 120 livres de Lyon 100 livres de Rouen, & 80 livres de Rouen 100 livres de Toulouse, & 100 livres de Toulouse 74 livres de Genève; combien 100 livres de Venise font elles de livres de Genève? 129
 Problème semblable au précédent. Un écu de France vaut 80 deniers de Hollande; 415 deniers de Hollande valent 140 deniers d'Angleterre; 140 deniers d'Angleterre 420 deniers de Hambourg;

xij TABLE DES CHAPITRES

- 64 deniers de Hambourg 1 florin de Francfort ;
combien 166 écus de France valent-ils de florins
de Francfort ? 131
- En quoi la méthode des Mathématiciens est propre
à étendre l'intelligence , 132. not. (a)
- Un corps plongé dans l'eau perd quelque chose de
sa pesanteur , 134. & ibid. not. (a)
- Problème. Un morceau de fonte , ou bien un tron-
çon d'une pièce d'artillerie étant donné , trouver
la quantité de rosette & d'étain , qui en fait
l'alliage , 134
- Origine de ce Problème célèbre sous le nom de la
Couronne de Hiéron , 139. not. (a)
- Problème. On a trouvé qu'un terrain mesuré avec
une perche de 22 pieds , contient 1 arpent , 70
perches , 0 toises , 30 pieds , 75 pouces quarrés ;
si on l'avoit mesuré avec une perche de 18 pieds ,
combien auroit-on trouvé d'arpens , de per-
ches , &c. ? 145
- Problème. Trouver la somme d'une progression Géo-
métrique descendante d'un nombre de termes in-
fini , 148
- COROLLAIRE.** Les deux premiers termes
d'une progression infinie descendante étant don-
nés , on trouvera la somme de tous les termes de
cette progression , 150
- Comment le dernier terme d'une progression descen-
dante , dont le nombre des termes croît sans fin ,
peut être supposé $= 0$, 151
- COROLLAIRE I.** du n°. 272. Si d'une gran-
deur quelconque on ôte la moitié , après cela la
moitié de ce qui reste , & ainsi de suite sans fin ,
on parviendra à un reste plus petit qu'aucune
grandeur donnée , ou à un reste que l'on pourra
regarder comme 0 , 152
- COROLLAIRE II.** du n°. 272. La somme d'une
progression Géométrique infinie descendante en
raison quadruple , c'est-à-dire , dont le premier

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xii

terme est quadruple du second , le second quadruple du troisième , & ainsi de suite ; cette somme est au premier terme de la progression , comme 4. est à 3 , ibid.

Ce qu'on entend par l'Exposant d'une progression ,

153

Problème. *Un homme joue contre un autre un Passe-Dix avec trois dez. Le second a parié d'abord un Louis que le premier ne passeroit pas ; celui-ci a passé. Le perdant , dont le projet étoit de se retirer du jeu dès qu'il auroit gagné un Louis , en met deux pour le second coup , & il les perd. Il en met donc quatre au troisième coup , qu'il perd encore ; doublant toujours pour le coup suivant ce qu'il a perdu dans le précédent , il parvient à perdre tout l'or qu'il portoit : avant néanmoins continué de parier sur sa parole d'honneur , il a perdu 20 coups de suite ; après quoi celui qui tenoit les dez a refusé de tenir les paris , voulant sçavoir si toutes ces pertes réunies n'excédoient pas les facultés de son adversaire ,* 155

Problème *qui est l'inverse du précédent. Supposons que le perdant de la question précédente prenne sa revanche , & tienne les dez ; que son même adversaire parie deux Louis pour le premier coup , & qu'il double toujours au coup suivant ce qu'il aura perdu dans le précédent , comme on a fait ci-dessus. Combien doit-il perdre de coups de suite , pour que son antagoniste ne lui doive plus rien ou presque rien ?* 156

Nécessité indispensable de l'usage des logarithmes , 158. not. (a)

De la progression Arithmétique. *Ce que c'est ,* 160

Un terme quelconque d'une progression Arithmétique est toujours égal au premier terme , joint à la différence de la progression multipliée par le nombre des termes qui le précèdent , ibid.

Le dernier terme d'une progression Arithmétique est

xiv TABLE DES CHAPITRES

égal au premier, joint à la différence de la progression multipliée par le nombre de tous les termes moins 1, ibid.

Le premier terme, le dernier, & le nombre des termes d'une progression Arithmétique étant donnés, on en trouvera la différence, en ôtant le premier terme du dernier, & divisant ensuite ce reste par le nombre des termes moins 1, 161

Déterminer le nombre des termes d'une progression Arithmétique, dont le premier terme, le dernier & la différence sont donnés, en ôtant le premier du dernier, & divisant ce reste par la différence de la progression, ibid.

Dans une progression Arithmétique quelconque, la somme de deux termes quelconques, à égale distance des extrêmes, est égale à la somme de ces extrêmes, ibid.

La somme de tous les termes d'une progression Arithmétique quelconque est égale à la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes de cette progression, 162

Si le premier terme d'une progression Arithmétique ascendante est 0, la somme de tous les termes de la progression sera égale au dernier terme multiplié par la moitié du nombre des termes, 163

Problème, où l'on fait usage de la progression Arithmétique. On se propose de planter une Avenue, dont les deux côtés doivent avoir chacun 300 toises, les arbres à trois toises l'un de l'autre. Pour les porter plus commodément à l'endroit de leur destination, celui qui en est chargé doit les prendre à 3 toises du premier que l'on plantera. Comme on suppose leur pesanteur assez considérable, il ne pourra en transporter qu'un seul à la fois. Afin donc qu'on puisse évaluer le tems qu'il emploiera à ce transport, on demande la longueur du chemin qu'il sera obligé de faire, 164

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xv

Différence des degrés de latitude , 165. not. (2).

CHAPITRE II. Des lignes proportionnelles , 166

Proposition XVIII. Les surfaces des triangles quelconques sont entr'elles , comme le produit de leur base par leur hauteur , ibid.

Problème. Déterminer le rapport de deux triangles , dont l'un a 8 pieds de base sur 5 de hauteur , & l'autre 12 de base sur 6 de hauteur , 167

Proposition XIX. Les triangles de même hauteur sont entr'eux comme leur base ; & les triangles de même base sont entr'eux comme leur hauteur , 168

CONVERSE. Les triangles qui sont entr'eux comme leur base , ont nécessairement même hauteur ; & ceux qui sont entr'eux comme leur hauteur , ont nécessairement même base , ibid.

Problème. Trouver le rapport d'un triangle , dont la base = 7 toises , & la hauteur en vaut 4 , à un autre triangle , dont la base = aussi 7 toises , & la hauteur 20 , 169

Proposition XX. Deux triangles égaux en surface , & qui ont même base , ont nécessairement même hauteur , ou sont posés entre les mêmes parallèles , ibid.

Proposition XXI. Une ligne qui coupe deux côtés d'un triangle parallèlement à son troisième côté , coupe ces deux côtés en proportion , 170

CONVERSE. Si deux côtés d'un triangle sont coupés en parties proportionnelles par une ligne , cette ligne sera nécessairement parallèle au troisième côté , 172

COROLLAIRE. I. Les deux côtés d'un triangle , coupés par une ligne parallèle au troisième côté , sont entr'eux comme leurs parties correspondantes , 173

COROLLAIRE II. Si l'on coupe un angle quelconque d'un triangle en deux parties égales , la base de cet angle sera coupée en deux segments proportionnels aux deux côtés qui forment cet angle , 174

TABLE DES CHAPITRES

COROLLAIRE III. Deux triangles peuvent avoir un angle égal, & des côtés autour d'un autre angle proportionnels, sans être pour cela des triangles équiangles, 175

Proposition XXII. Les triangles équiangles ont leurs côtés proportionnels, 176

Réciproquement, si les côtés d'un triangle sont proportionnels aux côtés d'un autre triangle, ces triangles sont nécessairement équiangles, 177

Ce qu'on appelle triangles semblables, 178

COROLLAIRE I. Si un angle d'un triangle est égal à un angle d'un autre triangle, & que de plus les côtés qui sont autour du premier angle, soient proportionnels aux côtés qui sont autour du second angle, il est certain que ces deux triangles sont semblables; ou, ce qui est la même chose, que ces deux triangles sont équiangles, *ibid.*

COROLLAIRE II. Deux triangles sont semblables, quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun, 179

COROLLAIRE III. Si les deux triangles DBC , dbc , qui ont les angles C , c , égaux, & les côtés autour des angles B , b , proportionnels, ont encore les angles D , d , de même espèce, c'est-à-dire, tous deux obtus ou tous deux aigus; il faut nécessairement conclure que les angles B , b , compris entre les côtés proportionnels, sont égaux, & par conséquent que ces deux triangles sont semblables, *ibid.*

Proposition XXIII. Si du même point pris au-dehors ou au-dedans du cercle, on tire deux lignes, dont chacune prolongée, s'il le faut, rencontre la circonférence en deux points, je dis, 1°. Si le point est au-dedans du cercle, que les parties de l'une sont réciproquement proportionnelles aux parties de l'autre; & que 2°. Si le point est pris hors du cercle, les lignes entières sont réciproquement

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xvij

proquement proportionnelles aux parties qui sont hors du cercle , 180

CONVERSE. Si deux lignes qui se croisent en un point sont telles , que les parties de l'une soient réciproquement proportionnelles aux parties de l'autre ; je dis que les extrémités de ces lignes sont nécessairement dans la circonférence d'un même cercle ; en sorte qu'en faisant passer une circonférence de cercle par trois de ces points pris à volonté , elle passera nécessairement par le quatrième point , 182

COROLLAIRE I. Si d'un même point pris hors d'un cercle , on tire une sécante & une tangente , cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière & sa partie hors du cercle , 183

COROLLAIRE II. Nouvelle démonstration , que dans un triangle rectangle , le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés , 184

Deux ou plusieurs cercles , dont les diamètres commencent en un même point , sur une même ligne , ne se touchent qu'en un même point unique ; soit que leurs convexités se rencontrent , soit que la convexité de l'un rencontre la concavité de l'autre , 185

En joignant par une ligne droite les centres de deux cercles qui se touchent , cette ligne passera nécessairement par leur point de contingence , 186

Problème. Etant donnés trois cercles , qui se touchent réciproquement par les extrémités de leurs diamètres , (& que l'on suppose être les profils de trois cylindres) en trouver un quatrième , qui touche en même tems les trois premiers , *ibid.*

Proposition XXIV. Une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence d'un cercle sur son diamètre , est moyenne proportionnelle entre les parties de ce diamètre , 187

xviii TABLE DES CHAPITRES

Proposition XXV. *En supposant la même perpendiculaire, si du point de la circonférence d'où elle part, on tire des lignes aux extrémités du diamètre, les triangles que ces lignes formeront seront semblables, ou équiangles,* 188

Remarque. *Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypothénuse, non-seulement cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothénuse, mais elle divise encore le grand triangle en deux petits triangles semblables au grand triangle, & semblables entr'eux,* 190

Proposition XXVI. *Si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypothénuse, chaque côté du triangle devient une moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse & le segment qui répond à ce côté,* ibid.

CONVERSE *Si les côtés d'un triangle rectangle deviennent moins proportionnels entre l'hypothénuse entière & les segmens correspondans faits par une ligne abaissée du sommet de l'angle droit, cette ligne sera nécessairement perpendiculaire sur l'hypothénuse,* 191

Proposition XXVII. *Le carré fait sur l'hypothénuse d'un triangle rectangle, est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés de ce triangle,* 192

Il est bisarre de démontrer l'Arithmétique par la Géométrie, 193. not. (2)

COROLLAIRE I. *Si l'on connoît les deux côtés qui forment un angle droit, on aura la longueur de l'hypothénuse, en tirant la racine quarrée de la somme des carrés des deux côtés connus,* 194

COROLLAIRE II. *En connoissant l'hypothénuse & l'un des côtés, on trouvera l'autre côté, si on extrait la racine quarrée de la différence qu'il y aura entre le carré de l'hypothénuse & le carré du côté connu,* 195

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xlx

COROLLAIRE III. *La diagonale d'un carré est incommensurable avec l'un de ses côtés ; c'est-à-dire, qu'en prenant une grandeur quelconque qui mesure exactement ce côté, cette mesure ne mesurera pas exactement la diagonale : il y aura toujours de l'excès ou du défaut, & l'on ne pourra pas déterminer le rapport numérique de cet excès ou de ce défaut à la grandeur qui aura servi de mesure,* 195

Proposition XXVIII. *Si du sommet de l'angle obtus d'un triangle obtusangle, ou de l'angle aigu d'un triangle acutangle quelconque scalène, on abaisse une perpendiculaire sur le côté opposé, il arrivera que le carré du côté opposé à l'angle d'où part la perpendiculaire, est égal à la différence des carrés des deux autres côtés, plus deux fois le rectangle de ce même côté par le petit segment,* 196

COROLLAIRE 1. *Si l'on connoît les trois côtés d'un triangle obtusangle ou acutangle, il sera très-facile de déterminer la valeur de l'un des deux segmens faits par une perpendiculaire, que l'on imagineroit abaissée de l'angle obtus ou de l'angle aigu sur le côté opposé à cet angle,* 197

COROLLAIRE II. *On peut évaluer un triangle obtusangle ou acutangle par la seule connoissance de ses trois côtés,* ibid.

COROLLAIRE III. *En nous tenant toujours à la supposition de la proposition XXVIII, si les deux côtés sont égaux, la perpendiculaire tombera sur le milieu de l'autre côté, & rendra par conséquent égaux les deux segmens de ce côté,* 198

Comment juger par la simple connoissance des côtés, si un triangle est rectangle, obtusangle ou acutangle ? ibid.

Problème. *Déterminer le rapport des circuits, des contours ou des périmètres des figures semblables, différentes du triangle,* 200

xx TABLE DES CHAPITRES

Quelles sont les figures semblables? 200

COROLLAIRE I. Si des points A, a , on tire les lignes AD, AC , d'une part, & les lignes ad, ac , d'une autre part; je dis que les périmètres de ces figures sont entr'eux comme les lignes AD, ad , ou AC, ac , semblablement tirées, c'est-à-dire, tirées d'un angle à son angle correspondant, 201

COROLLAIRE II. Les périmètres ou les circonférences sont entr'elles comme leurs rayons; ou, si l'on veut encore, comme leurs diamètres qui sont doubles des rayons, 202

COROLLAIRE III. Une circonférence est double, triple, quadruple, &c. d'une autre circonférence, quand son rayon ou son diamètre est double, triple, ou quadruple du rayon ou du diamètre de cette autre circonférence, 203

Problème. Trouver le rapport des surfaces des figures semblables, 204

Remarque sur la différence du rapport des périmètres au rapport des surfaces, 207

Problème. Trouver une quatrième proportionnelle Géométrique à trois lignes données, *ibid.*

Problème. Trouver une troisième proportionnelle à deux lignes données, 208

Problème. Trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, *ibid.*

Problème. Couper une ligne en moyenne & extrême raison, 209

Problème. Déterminer le rapport d'un côté du décagone inscrit dans un cercle au rayon de ce cercle, 210

Problème. Trouver par une seule construction le côté du décagone & celui du pentagone, inscriptibles au même cercle, 212

Problème. Trouver une moyenne proportionnelle Arithmétique entre deux lignes données, 215

Problème. Avec une ligne donnée faire un paral-

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xxj

l'élogramme égal en surface à un parallélogramme donné, 216

Problème. *Transformer en quarré un rectangle donné; c'est-à-dire, trouver un quarré dont la surface soit égale à celle de ce rectangle,* ibid.

Remarque. *Plus les figures approchent d'être régulières, c'est-à-dire, moins leurs côtés diffèrent les uns des autres, moins aussi ils ont de circuit par rapport à l'aire ou à la surface que renferment ces côtés,* 217

Comment les Abeilles géométrisent dans la construction de leurs alvéoles? 218

De toutes les figures régulières du même circuit, le cercle est celle qui renferme un plus grand espace, 223

L'aire d'un polygone régulier quelconque est plus petite qu'un cercle du même circuit, 225

Problème. *Quarrer un triangle, ou déterminer le quarré dont la surface soit précisément égale à celle d'un triangle,* 226

Problème. *Faire que deux ou plusieurs parallélogrammes donnés aient la même hauteur, sans changer de surface,* 227

COROLLAIRE I. *En réquisant à la même hauteur tel nombre de parallélogrammes que l'on voudra, on en pourra toujours faire un seul parallélogramme,* 228

COROLLAIRE II. *On peut trouver un seul quarré égal en surface à tel nombre de parallélogrammes que l'on voudra supposer,* 229

Problème. *Trouver un seul triangle égal à plusieurs triangles donnés,* ibid.

COROLLAIRE III. *On peut trouver un seul quarré égal à tel nombre de triangles que l'on voudra, après avoir réduit tous les triangles en un seul,* 230

Problème. *Transformer un trapèze dont les deux côtés sont parallèles, en un parallélogramme qui*

xxij TABLE DES CHAPITRES

lui soit égal en surface ,	ibid.
COROLLAIRE. <i>Moyen d'évaluer un trapèze,</i>	231
Problème. <i>Quarrer un cercle, c'est-à-dire, trouver un quarré dont la surface soit égale à celle d'un cercle proposé,</i>	232
Problème. <i>Trouver un quarré égal à tant de quarrés que l'on voudra ,</i>	233
Problème. <i>Trouver un cercle égal à la somme de deux cercles, ou égal à tant de cercles que l'on voudra ,</i>	234
COROLLAIRE. <i>Quand un triangle rectangle est isoscèle, si l'on construit des demi-cercles sur chaque côté, il en résulte la quadrature d'une portion de cercle. Quadrature de la Lunule d'Hypocrate ,</i>	235
Problème. <i>Elever une perpendiculaire sur l'extrémité d'une ligne, en faisant usage de la propriété du quarré de l'hypothénuse ,</i>	236
Problème. <i>Deux cercles concentriques, ou qui ont le même centre, étant donnés, trouver le cercle auquel est égale la couronne circulaire comprise entre les deux circonférences de ces cercles ,</i>	237
Problème. <i>Réduire une figure quelconque de grand en petit, c'est-à-dire, trouver une autre figure semblable plus petite, qui ait avec elle un rapport quelconque ,</i>	238
<i>En quoi consiste l'esprit de la Géométrie,</i>	240. not. (a)
Problème. <i>Réduire un plan de Fortification de grand en petit ,</i>	241
Problème. <i>Réduire de petit en grand une figure quelconque selon tel rapport que l'on voudra ,</i>	242
Expédient proposé aux Commencans , pour les tirer d'embaras lorsqu'ils auront une figure à transformer de petit en grand ,	247
Problème. <i>Lever le plan , ou faire la Carte d'un pays ou d'une campagne quelconque ,</i>	251
Quels angles on doit prendre pour la résolution de ce Problème?	255

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xxiij

- Problème. Déterminer la distance d'une montagne
à des points donnés, 256
- Problème Sur une ligne donnée construire un segment
de cercle capable d'un angle donné, c'est-à-dire,
construire un segment, dans lequel on puisse ins-
crire un angle égal à un angle donné, 260
- Problème. Couper une ligne en parties proportion-
nelles aux parties d'une autre ligne, 263
- Problème. Construire une échelle qui représente des
toises, des pieds, des pouces, 264

L I V R E I V.

Où l'on traite de la Mesure des Solides.

- CHAPITRE I. Génération des solides. Evalua-
tion de leurs surfaces, 266
- Ce qu'on appelle solides en Géométrie, ibid.
- Problème. Déterminer la surface d'un cube, d'un
parallépipède, d'un prisme, 268
- Problème. Trouver la surface d'un cylindre droit,
270
- Problème. Mesurer la surface d'une pyramide, 272
- Problème. Trouver la surface d'un cône droit, 273
- COROLLAIRE I. Si l'on construit un triangle
rectangle, dont la base soit égale à la circonfé-
rence de la base circulaire d'un cône, & la hau-
teur égale au côté du même cône, ce triangle rectan-
gle sera égal à la surface convexe de ce cône, 274
- COROLLAIRE II. En retranchant de la hauteur
de ce triangle une partie égale à une partie du
côté du cône, si l'on tire SP parallèle à cm ,
cette parallèle SP sera égale à la circonférence
de la base du petit cône supérieur, ibid.
- COROLLAIRE III. La surface convexe du
petit cône DTS est égale à la surface du petit
triangle rectangle dSP . 275
- Problème. Trouver la surface d'un cône tronqué,
ibid.
- Génération de la sphère, 277

xxiv TABLE DES CHAPITRES

Noms que l'on donne à certaines parties de la sphère, 277

Problème. Déterminer la surface de la sphère, 278

COROLLAIRE I. Si l'on circonscrit un cylindre à la sphère, c'est-à-dire, si l'on enferme la sphère dans un cylindre qui touche la sphère partout où il la peut toucher, la surface convexe du cylindre circonscrit sera égale à celle de la sphère, 281

COROLLAIRE II La surface de la sphère est quadruple de la surface de l'un de ses grands cercles. *ibid.*

COROLLAIRE III. La surface d'une zone de la sphère est égale à un rectangle, qui auroit pour base la circonférence d'un grand cercle de la sphère, & une hauteur égale à une partie de l'axe comprise entre les deux cercles qui terminent la zone, 282

Problème. Trouver le rapport de la surface totale du cylindre à celle de la sphère inscrite à ce cylindre, *ibid.*

Problème. Déterminer le rapport des surfaces des corps semblables, 283

COROLLAIRE. Les surfaces des sphères sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres, ou comme les quarrés de leurs rayons, *ibid.*

CHAPITRE II. De la solidité des corps. Principes & vérités sur lesquels on en fonde l'évaluation, 285

Proposition I. La commune section de deux plans quelconques est nécessairement une ligne droite, 286

Proposition II. Deux plans parallèles, coupés par un troisième plan, donnent des sections parallèles rectilignes. 287

Proposition III. Si une pyramide quelconque est coupée par un plan parallèle à sa base, non-seulement il en naîtra une coupe parallèle au plan de la base de la pyramide, mais toutes les lignes qui

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xv

forment le contour de cette coupe , seront parallèles à toutes les lignes du périmètre de la base , chacune à leur correspondance , 188

Proposition IV. *La coupe parallèle à la base d'une pyramide est un polygone semblable à cette base ,* 189

REMARQUE, *où l'on fait voir que des figures peuvent être équiangles , sans avoir leurs côtés proportionnels , & réciproquement qu'elles peuvent avoir leurs côtés proportionnels , sans être équiangles ,* 190

Proposition V. *Les pyramides de même base & de même hauteur sont égales en solidité ; ou , ce qui est la même chose , deux pyramides dont les bases sont égales , ont aussi une égale solidité , quand elles sont d'ailleurs situées entre les mêmes plans parallèles ,* 191

COROLLAIRE. *Les cônes étant des pyramides régulières d'un très-grand nombre de petites surfaces insensibles , il s'ensuit que les cônes sont non seulement égaux en solidité aux cônes , mais encore aux pyramides de même hauteur & de base égale ,* 193

Proposition VI. *On peut toujours diviser un prisme droit triangulaire en trois pyramides triangulaires égales ,* ibid.

COROLLAIRE. *Une pyramide triangulaire , ou un cône , n'est que le tiers d'un prisme triangulaire de même base & de même hauteur ,* 195

Proposition VII. *Les prismes triangulaires dont les bases sont égales , & qui ont même hauteur , ou qui sont posés entre les mêmes plans parallèles , ont aussi une solidité égale , soit que ces prismes soient tous deux droits , ou tous deux obliques , ou enfin que l'un soit droit & l'autre incliné ,* ibid.

Proposition VIII. *Un parallélipède est toujours égal à un autre parallélipède de même base & de même hauteur ,* 196

xxvj TABLE DES CHAPITRES

Proposition IX. *Un prisme polygone quelconque, droit ou oblique, c'est-à-dire, un prisme dont la base est un polygone quelconque, est égal en solidité à tout autre prisme polygone de même base & même hauteur,* 297

COROLLAIRE I. *Les cylindres de même base & de même hauteur sont égaux en solidité,* ibid.

COROLLAIRE II. *Un prisme polygone quelconque est toujours le triple d'une pyramide polygone quelconque de même base & de même hauteur,* ibid.

COROLLAIRE III. *Un cylindre a trois fois plus de solidité qu'un cône ou une pyramide de même base & de même hauteur; ou, ce qui revient au même, un cône ou une pyramide n'est que le tiers d'un cylindre, ou d'un prisme de même base & de même hauteur,* 298

Problème. *Trouver la solidité d'un parallépipède droit, haut de trois toises, sur une base dont la longueur égale six toises, & la largeur en vaut quatre,* 299

COROLLAIRE I. *On détermine la solidité d'un prisme quelconque, en faisant le produit de ses trois dimensions, longueur, largeur, épaisseur,* 300

COROLLAIRE II. *Une toise cube contient 216 pieds cubes,* ibid.

TABLE des mesures cubiques les plus usitées, 301

Problème. *Déterminer la solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque,* ibid.

Problème. *Trouver la solidité d'un cône droit tronqué, dont on connoît les circonférences ou les diamètres des bases & un côté,* 302

Autre solution assez commode dans la pratique, pour trouver la solidité d'un cône ou d'une pyramide tronquée, indépendamment de la hauteur d'un petit cône élevé, 303

Remarque I. *On trouve la base moyenne proportionnelle Géométrique entre la supérieure & l'inférieure du cône tronqué, en multipliant la cir-*

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xxvj

conférence de la grande base par la moitié du rayon de la petite circonférence supérieure du cône tronqué, 306

Remarque II. *Une moyenne proportionnelle Géométrique entre la moitié du rayon du grand cercle, & la moitié du rayon du petit cercle du cône tronqué, est le demi rayon d'un cercle égal à la base moyenne cherchée,* ibid.

Problème. *Déterminer la solidité de la sphère,* 307

COROLLAIRE I. *La sphère est égale à une pyramide, ou à un cône, qui auroit pour base la surface de la sphère, & pour hauteur son rayon,* 308

COROLLAIRE II. *En général, les solides de même espèce sont entr'eux comme le produit des dimensions, qui concourent à déterminer leur solidité,* ibid.

COROLLAIRE III. *Quand les solides sont des corps semblables, c'est-à-dire, quand les dimensions de l'un sont proportionnelles aux dimensions de l'autre, ces corps sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues,* 309

COROLLAIRE IV. *Un gros solide a moins de surface à proportion, qu'un petit solide de même matière,* 310

Problème. *Trouver le rapport de la solidité de la sphère à celle du cylindre circonscrit,* ibid.

COROLLAIRE. *La solidité de la sphère est à la solidité du cylindre circonscrit, comme la surface de la sphère est à celle du même cylindre,* 311

Problème. *Transformer une pyramide, un cône ou une sphère, en un parallépipède qui lui soit égal en solidité,* ibid.

Problème. *Transformer un cylindre, ou un prisme polygone quelconque, en un parallépipède de même solidité,* 312

Problème. *Faire un cube égal à un parallépipède donné,* ibid.

De la duplication du cube, & de ce qui en fut l'occasion, 314 & ibid. not. (a)

xxviii] TABLE DES CHAPITRES

Problème. Trouver organiquement deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données,	315
Résolution organique de Platon,	316
Problème. Trouver organiquement entre deux lignes données tant de moyennes proportionnelles que l'on voudra. Résolution organique de M. Descartes,	317
Problème. Trouver géométriquement trois moyennes proportionnelles entre deux lignes données,	320
Problème. Déterminer un parallépipède qui ne soit que les $\frac{1}{2}$ d'un parallépipède semblable donné,	321
Problème. Trouver la solidité d'un corps brut,	323
CHAPITRE III. Du toisé des solides,	325
Ce que c'est que toiser un solide,	ibid.
Problème. Trouver la solidité d'un parallépipède, dont la largeur égale 2 toises, 1 pied, 3 pouces ; la longueur 3 toises, 2 pieds, 4 pouces, & la hauteur 1 toise, 5 pieds, 9 pouces,	327
Problème. Déterminer la solidité d'un corps, dont la longueur égale 15 toises, 5 pieds, 3 pouces ; la largeur 6 toises, 2 pieds, 6 pouces, & la hauteur 8 toises, 3 pieds, 9 pouces,	329
Problème. On demande la solidité d'un prisme quelconque, dont la première dimension égale 3 toises, 1 pied, 7 pouces ; la seconde 2 toises, 4 pieds, 9 pouces, & la troisième 2 pieds, 11 pouces,	331
Problème. La longueur d'un parallépipède égale 5 pieds, 9 pouces, 6 lignes. Sa largeur est de 2 pieds, 4 pouces, 3 lignes ; & son épaisseur égale 3 pieds, 6 pouces. Quelle est la solidité de ce corps ?	333
EXAMEN de la méthode des Indivisibles,	335
Réfutation Géométrique des raisons sur lesquelles on fonde cette méthode,	336
CHAPITRE IV. De la solidité des corps selon la méthode des Anciens, appelée méthode d'Exhaustion,	343

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xxix

Proposition I. *Les prismes triangulaires droits ou également inclinés, de hauteur égale, & dont les bases sont égales & semblables, sont égaux en solidité,* 344

Proposition II. *Les parallépipèdes de même base & de même hauteur ont une solidité égale,* *ibid.*

Proposition III. *On trouve la solidité d'un parallépipède droit ou oblique, en multipliant sa base par sa hauteur,* 345

Proposition IV. *Les parallépipèdes quelconques qui ont des bases & des hauteurs égales, sont égaux en solidité,* *ibid.*

Proposition V. *Les prismes triangulaires quelconques, droits ou obliques, qui ont une égale hauteur, & des bases égales, sans les supposer semblables, sont égaux en solidité,* 346

COROLLAIRE. *On détermine la solidité d'un prisme triangulaire, en multipliant sa base triangulaire par sa hauteur,* *ibid.*

Proposition VI. *Les prismes polygones quelconques, qui ont des bases & des hauteurs égales, ont une égale solidité,* 347

COROLLAIRE. *On détermine la solidité d'un prisme polygone quelconque, en faisant le produit de sa base par sa hauteur,* *ibid.*

Proposition VII. *Les prismes polygones quelconques de même hauteur, sont entr'eux comme leur base,* *ibid.*

Lemme I. *Si l'on inscrit & si l'on circonscrit sans fin un très-grand nombre de parallélogrammes à une figure plane quelconque, je dis que la somme des parallélogrammes inscrits différera de la somme des parallélogrammes circonscrits, moins que d'une surface donnée quelconque, & petite qu'elle puisse être,* 348

COROLLAIRE. *La somme des rectangles inscrits, ou celle des circonscrits, peut être telle, que sa différence avec le triangle soit inassignable;*

xxx TABLE DES CHAPITRES

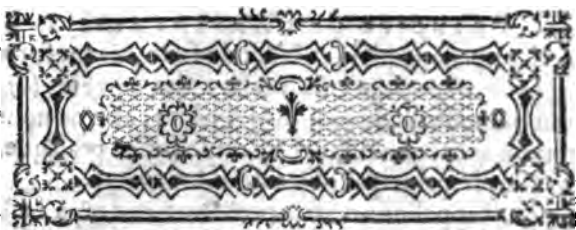
desorte que la somme des circonscrits , celle des inscrits & le triangle , deviendront égaux au der- nier ressort ,	349
Lemme II. Si l'on inscrit à une pyramide triangu- laire un très-grand nombre de prismes triangu- laires , je dis que leur somme se confondra enfin avec la pyramide , ou que la solidité totale de ces prismes inscrits ne sera pas différente de celle de la pyramide ,	350
Proposition VIII. Les pyramides triangulaires de mê- me hauteur sont entr'elles comme leurs bases ,	351
Proposition IX. En général , les pyramides de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases , de quelque figure que ces bases puissent être ,	353
Proposition X. Les pyramides quelconques de même hauteur & de même base , ou de bases égales , ont une égale solidité ,	354
Histoire de Saunderson , Mathématicien Anglois , aveugle presque de naissance ,	357. not. (a)
Eloge du toucher ,	ibid.
Proposition XI. La solidité d'une pyramide droite ou oblique est égale au produit de sa base par le tiers de sa hauteur. Démonstration de Saunderson ,	356
COROLLAIRE. Dans les pyramides égales , & généralement dans tous les corps égaux en solidité , la base & la hauteur sont en raison réciproque ,	358
Récapitulation de la méthode d'Exhaustion. Confir- mation de cette méthode ,	359
Proposition I. Si deux grandeurs sont la limite d'une même quantité , ces deux grandeurs seront égales entr'elles ,	360
Proposition II. Si l'on a le produit de deux gran- deurs , & le produit des limites de ces deux gran- deurs , je dis que le produit des limites sera né- cessairement la limite du produit des deux gran- deurs ,	361
Remarque , où l'on démontre à la rigueur , que la surface du cercle est égale au produit de la demi- circonférence par le rayon ,	362

ET DES PRINCIPALES MATIÈRES. xxxj

COROLLAIRE. Si l'on pouvoit déterminer géométriquement la longueur de la circonférence du cercle, c'est-à-dire, si l'on pouvoit la rectifier, on auroit à la rigueur la quadrature du cercle,	363
De la Trigonométrie rectiligne par les sinus,	364
Les angles d'un triangle ne sont pas entr'eux comme les côtés opposés à ces angles,	366
Les angles d'un triangle ne sont pas entr'eux comme les cordes correspondantes,	367
Les côtés d'un triangle ne sont pas entr'eux comme les cordes des angles opposés à ces côtés,	ibid.
Première démonstration de cette vérité,	ibid.
Seconde démonstration de la même,	370
Troisième démonstration de M. le P. Féry, Mî-nime,	371
Les côtés d'un triangle sont entr'eux comme les cordes du double des angles opposés à ces côtés,	ibid.
Le sinus d'un angle n'est que la moitié de la corde du double de cet angle,	373
Les côtés d'un triangle sont entr'eux comme les sinus des angles opposés à ces côtés,	ibid.
Idée de la manière dont les tables des sinus ont été construites,	375
Comment on a déterminé en nombres la valeur de la tangente & de la sécante de chaque angle,	378
Idée de l'usage des tables des sinus,	381
Résolution de tous les Problèmes de la Trigonométrie par cette proposition unique : dans un triangle, les sinus des angles sont entr'eux comme les côtés opposés à ces angles,	383
Problème I. Trouver la distance de deux objets inaccessibles,	384
Problème II. Deux côtés d'un triangle étant donnés, avec l'angle intercepté entre ces côtés, trouver le troisième côté,	385
Problème III. Deux côtés inégaux d'un triangle étant donnés, avec l'angle opposé à l'un de ces côtés, trouver le troisième,	388
Conclusion. Deux triangles peuvent avoir deux côtés	

xxxij TABLE DES CHAPITRES

- égaux, chacun à chacun, avec un angle égal opposé au même côté, & être néanmoins fort différens,* ibid.
- Problème IV.** *Les trois côtés d'un triangle étant connus, en déterminer la valeur de chaque angle,* 390
- Utilité des tangentes dans la résolution des Problèmes de la Trigonométrie par les sinus,* 395
- Conclusion.** *Dans un triangle scalène la moitié de la somme de deux côtés donnés est à la moitié de leur différence, comme la tangente de la demi-somme connue des deux angles inconnus est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles,* 400
- Dans quel sens la découverte des Arts les plus utiles à la société est due au hasard,* 401. not. (a)
- Problème.** *Trouver d'en bas la hauteur d'une élévation perpendiculaire à l'horison, tels que sont les arbres, les clochers, les pyramides, les édifices qui s'élèvent, comme l'on sçait, perpendiculairement à l'horison,* 403
- Trouver, par une seule station, les distances de cette station à trois points, dont les éloignemens respectifs sont connus,* 405 & 406
- Différentes circonstances de ce Problème. Cas où il est impossible. Caractère de cette impossibilité,* 406, 407, 408, 409
- Problème.** *Trouver le rapport approché du diamètre d'un cercle à sa circonférence,* 410
- Problème.** *Trouver la surface de la base d'une Tour circulaire inaccessible,* 412
- Problème.** *Trouver les degrés d'un arc accessible, au centre duquel il n'est pas possible de placer un instrument,* 413
- COROLLAIRE.** *Par les degrés connus d'un arc de cercle, & par sa longueur aussi connue en toises, pieds, &c., déterminer l'aire du cercle auquel cet arc appartient,* 415
- Fin de la Table des Matières.



S U I T E DES INSTITUTIONS.

L I V R E I I.

CHAPITRE PREMIER.

Principes de l'Arpentage. Mesure des Terreins.

149.



USQU'À présent nous n'avons considéré que les angles & les lignes qui entrent dans la composition d'une figure. Ce ne sont-là, pour ainsi dire, que les dehors qui doivent nous conduire à son intérieur. Il importe extrêmement de sçavoir évaluer la surface renfermée au-dedans d'une figure. Par-là on assure à chaque membre d'une société les possessions que les Loix lui attribuent. L'intérêt & le bon ordre sont encore ici les motifs qui ont déterminé les hommes à rechercher une méthode de mesurer avec exactitude une portion de terre, un jardin,

Tome II.

A

2. PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

un champ, une plaine. L'art de faire ces mesures s'appelle *Arpentage*, ou mesure des terrains (a), dont nous allons donner les principes, afin de nous étendre avec connoissance de cause sur les pratiques qui font le principal objet de l'Arpentage.

150. Rappelons-nous le problème 40 (n^o. 111.), où nous avons enseigné la manière de faire passer une circonférence de cercle par trois points qui ne sont pas sur une même ligne droite. Il est clair que si l'on transportoit ces trois points sur une autre surface que celle où on les a d'abord supposés, & qu'on les mît les uns à l'égard des autres précisément dans la même distance où ils étoient sur le premier plan; il est clair, dis-je (b), que la nouvelle circonférence, que l'on feroit passer par ces trois points, seroit entièrement égale à la première, puisque la disposition de ces points est sup-

(a) J'ai vu partout conter une histoire sur l'origine de l'Arpentage, que l'on me permettra de traiter de fabuleuse, ou de supposée. Les Egyptiens, dit-on, sont les inventeurs de la Géométrie, parce que le débordement du Nil, qui couvre régulièrement tous les ans le terrain de l'Egypte, confondant toutes les bornes qui servent aux Particuliers à reconnoître & à déterminer l'étendue de leurs champs, c'étoit une nécessité d'avoir une mesure précise qui rendît à chacun ce qui lui appartenoit; ainsi les premiers Egyptiens, suivant cette opinion, furent obligés de penser à la manière d'évaluer la surface d'un champ; d'où nous est venu l'Art de l'Arpentage ou de la Géométrie. Ne seroit-il pas plus sage d'attribuer l'origine de la Géométrie à la cupidité générale des hommes, à la distinction forcée du tien & du mien, à leurs passions & à la crainte d'être mal & l'envie d'être mieux ont invité les hommes à former des sociétés; l'excès de leurs passions a imposé la nécessité aux plus sages ou aux plus forts d'entr'eux d'établir des Loix, pour retenir chaque membre dans les bornes que l'on a jugé à propos de leur prescrire. Il a donc fallu faire des divisions, & penser par conséquent à l'art de les exécuter. Voilà, je crois, l'origine de l'Arithmétique & de l'Arpentage, qui ont dû prendre naissance dans tous les lieux de la terre, où il s'est formé des Sociétés.

On se gardera donc bien d'amuser les jeunes gens à toutes ces petites histoires sur l'origine des Sciences & des Arts; cela n'est propre qu'à retrécir l'esprit; à moins qu'on ne leur en parle, pour en montrer le frivole.

(b) Ceux qui ne seront pas pleinement satisfaits de cette supposition, pourront la prouver par le moyen de la deuxième Démonstration de la Proposition XIV, page 40.

MESURE DES TERREINS. 3

posée précisément la même que celle qu'ils avoient auparavant.

Faisons aussi attention qu'à cause de l'uniformité de la circonférence circulaire, les cordes égales tracées dans un même cercle, ou dans des cercles égaux, retranchent ou soutiennent des arcs égaux.

Ces deux vérités sont si palpables, que c'est les avoir démontrées que d'y avoir fait penser.

PROPOSITION XIV.

151. Deux Triangles ABC, CDM (*fig. 1.*), dont tous les côtés sont égaux, chacun à chacun, sont égaux en surface. Pour peu que l'on réfléchisse sur cette proposition, on peut la mettre au nombre des Axiômes. Voici néanmoins comme je la démontre.

DÉMONSTRATION.

Comme l'on suppose que les côtés de ces Triangles sont égaux, chacun à chacun, c'est-à-dire, que $AB=CD$; $BC=DM$; $AC=CM$: si l'on démontre de plus que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun, il est évident que ces deux Triangles seront égaux en tout. Circonscrivons une circonférence à chacun de ces Triangles; les deux circonférences seront égales (n°. 150.), puisque les trois points A, B, C ont précisément la même disposition que les trois points C, D, M. Dans ce cas les trois côtés du Triangle ABC deviendront des cordes, aussi bien que les trois côtés du Triangle CDM. Ces cordes sont, par la supposition, égales, chacune à chacune; ainsi les arcs soutenus par ces cordes seront égaux, chacun à chacun (n°. 150.); & par conséquent les moitiés de ces arcs seront aussi égales, chacune à chacune: or ce sont les moitiés de ces arcs qui mesurent les angles des deux Triangles ABC, CDM (Prop.

4 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

13. n^o. 104.) ; donc les angles du Triangle ABC sont égaux aux angles du Triangle CDM, chacun à chacun : ces deux Triangles ne diffèrent donc ni par leurs angles, ni par leurs côtés ; ils sont donc parfaitement égaux ; C. Q. F. D.

Ceux qui ne seront pas aussi scrupuleux que je le suis de déduire leurs propositions immédiatement les unes des autres, & qui se soucieront peu de faire servir la treizième proposition à la démonstration de la quatorzième, pourront démontrer cette proposition de la manière suivante.

AUTRE DÉMONSTRATION

de la Proposition 14.

Il est certain que deux figures sont égales en surface, quand elles sont construites, ou qu'elles sont engendrées précisément de la même manière & avec les mêmes dimensions : or, si l'on vouloit engendrer ou construire un Triangle avec les trois lignes AB, AC, BC, on agiroit précisément de même que si on avoit à le construire avec les trois lignes CD, CM, DM (n^o. 76.) ; il en résulteroit donc la même chose ; C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est fautive ; c'est-à-dire, il est faux que des Triangles égaux en surface aient tous leurs côtés égaux, chacun à chacun. On le prouvera n^o. 177.

152. Ceci supposé, il y a deux choses à observer dans l'étendue d'un terrain, sa longueur & sa largeur : ainsi par la connoissance de ces deux dimensions, on doit évaluer toutes sortes de terrains. Cette évaluation n'opposeroit pas de grandes difficultés, si la surface d'une portion de terre étoit uniformément étendue en long & en large, comme la figure ABCD, (fig. 2.) où les longueurs AB, CD, sont égales, de même que les largeurs AD,

MESURE DES TERREINS.

BC le font aussi : de sorte que toute l'étendue de cette figure est déterminée par la connoissance d'une seule longueur & d'une seule largeur. Quand les deux dimensions sont égales, comme dans le carré, l'opération est encore plus simple : mais il est rare que la nature, sans le secours de l'art, offre une régularité si parfaite ; pour l'ordinaire une surface, qui se présente à mesurer, ne conserve aucune uniformité, ni dans sa longueur ni dans sa largeur. Telle est la figure 3. Il est donc besoin de la rappeler à une figure plus simple, ou de la décomposer en plusieurs figures, dont on puisse avoir facilement la mesure. Il est évident qu'en tirant des lignes d'un point D aux angles A, B, la figure ABCDE se trouvera divisée en trois Triangles ; & que s'il y a une méthode commode de mesurer le Triangle, quelqu'irrégulière qu'elle soit une figure, on en aura la mesure en prenant la valeur de tous les Triangles qui la composent, Mais le Triangle lui-même est encore une figure assez bizarre : il n'est ni également long, ni également large ; il faut donc recourir à quelque autre figure qui ait cette propriété, & dont le Triangle soit une partie connue. Or c'est ce qu'ont fait les Géomètres : ils ont considéré un *quadrilatère*, ou une figure de quatre côtés, (*fig. 2.*) dont les côtés opposés AB, DC sont parallèles, de même que les côtés AD, BC ; ce qui fait que la longueur & la largeur de cette figure sont uniformes, puisque les parallèles, pendant tout leur cours, gardent entr'elles une égale distance. La figure ABCD est un *parallélogramme*.

153. Ensuite ils ont remarqué qu'une ligne menée d'un angle D à l'angle B opposé, & qu'ils ont nommée *Diagonale*, divisoit le parallélogramme en deux Triangles BAD, BCD égaux entr'eux, puisque tous les côtés de l'un sont égaux à tous les

8 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

côtés de l'autre, chacun à chacun : car $AB=CD$; & $BC=AD$; la ligne DB est commune à l'un & à l'autre Triangle. Ainsi le Triangle $BAD=$ le Triangle BCD , (nº. 151.)

154. D'où il suit, que l'on peut toujours considérer un Triangle quelconque comme la moitié d'un parallélogramme ; par exemple, le Triangle ABC , (*fig. 4.*) se trouvera la moitié du parallélogramme $ABCD$, en menant par le point C la ligne CD égale & parallèle à la ligne AB , & tirant du point A au point D la ligne AD .

155. Il suffit donc de sçavoir mesurer le parallélogramme, dont la longueur & la largeur sont des dimensions uniformes, pour avoir avec précision la juste mesure des Terres les plus bisarres, pourvu néanmoins qu'ils soient terminés par des lignes droites ; car on peut les réduire en Triangles, & rapporter les Triangles aux parallélogrammes dont ils sont la moitié. De sorte donc que toute la Théorie de l'Arpentage se réduit à trouver une méthode de mesurer la surface d'un parallélogramme, ce qui ne doit pas être fort difficile, à cause de l'uniformité de ses dimensions.

156 Le parallélogramme peut être *droit* ou *oblique*. On appelle parallélogramme droit, celui qui a tous ses angles droits ; telle est la figure 5, que l'on nomme encore un *rectangle*, lorsqu'elle est plus longue que large. C'est un *carré*, si la longueur est égale à la largeur.

157. On a donné le nom de parallélogramme oblique à celui dont les angles sont aigus & obtus, parce que ses angles sont formés par des lignes obliques. La figure 6 est un parallélogramme oblique, que l'on appelle en particulier *Rhomboïde*, lorsque ses deux dimensions sont inégales ; mais on nomme *Rhombé* ou *Losange* le parallélogramme oblique

MESURE DES TERREINS. 7

qui a tous ses côtés égaux, comme la figure 7.

158. En général tout quadrilatère qui a seulement deux côtés parallèles, comme la figure 9, est appelé *Trapeze*; & s'il n'a aucun de ses côtés parallèles, c'est un *Trapésoïde*.

Le Trapeze n'ayant point ses dimensions uniformes, ne sçauroit être mesuré par lui-même; il faut le réduire au Triangle qui, comme nous l'avons déjà observé, se rapporte lui-même au parallélogramme.

Avant que d'en venir à la mesure du parallélogramme, donnons l'art de le construire dans tous les cas, & observons quelques-unes de ses propriétés.

PROBLÈME LXVIII.

159. Construire un Rectangle (*fig. 10.*), dont deux côtés AB , BD contigus (*a*) sont donnés.

RÉSOLUTION.

Sur la ligne AB , élevez perpendiculairement BD : ensuite du point D avec la ligne AB , décrivez un arc; & du point A avec la ligne BD , tracez en un autre qui coupe le premier au point C . Tirez AC & CD ; vous aurez le Rectangle $ABDC$, dont les côtés AB , BD sont donnés.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que les côtés opposés de cette figure sont parallèles, & que tous les angles sont droits.

Considérons les deux triangles ABD , ACD ; tous les côtés de l'un sont égaux à tous les côtés de l'autre, chacun à chacun: ainsi les angles opposés à des côtés égaux sont égaux: par conséquent l'angle B étant droit, l'angle C l'est aussi; de même

(a) Contigus c.-à-d. dont la rencontre mutuelle forme un angle.

8 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

l'angle $CDA =$ l'angle DAB : or deux lignes également inclinées sur une troisième sont parallèles (n°. 55.) ; donc AB est parallèle à CD . AB est perpendiculaire sur BD ; CD l'est donc aussi ; & par conséquent l'angle CDB est un angle droit. Mais comme l'angle CAD est encore égal à l'angle ADB , à cause que ces deux angles sont opposés aux côtés égaux AB , CD , il s'ensuit que CA est parallèle à DB (n°. 55.), laquelle étant perpendiculaire sur AB , il est nécessaire que CA le soit aussi (n°. 56.) ; ainsi l'angle CAB est droit, d'où il suit que la figure $ABCD$ est un rectangle, puisqu'elle a ses côtés opposés parallèles, & tous ses angles droits.

PROBLÈME LXIX.

160. Construire un Rhomboïde, ou un Parallélogramme oblique plus long que large (*fig. 11.*), dont deux des côtés AB , BD sont donnés, avec l'angle ABD compris entre ces côtés.

RÉSOLUTION.

Faites l'angle $OMG =$ l'angle ABD ; soit $MG = AB$ & $MO = BD$: du point G avec MO , décrivez un arc, & du point O avec GM , décrivez-en un autre qui coupe le premier au point S ; tirez les lignes OS , GS : le Rhomboïde $OMGS$ sera tel qu'on le demande ; ce qui se démontre, comme ci-devant, en tirant la diagonale MS .

PROBLÈME LXX.

161. Construire un Rhombe, ou un Losange (*fig. 12.*) avec la ligne AB & l'angle ABC .

RÉSOLUTION.

On sçait que tous les côtés du Losange doivent être égaux, & ses angles obliques.

MESURE DES TERREINS.

Sur la ligne $CD=AB$, faites l'angle FCD égal à l'angle ABC ; que le côté $CF=CD$, & des points D, F , avec la ligne CD , décrivez des arcs qui se coupent en G : la figure $CDGF$ sera un Losange qui aura les conditions données. Sa construction est assez claire.

Préparation à la mesure du Rectangle.

162. De même qu'il a fallu convenir d'une certaine longueur, qui servît de mesure commune à toutes les longueurs que l'on auroit à mesurer; il a été besoin aussi de déterminer une surface, à laquelle on dût rapporter toutes les surfaces que l'on voudroit évaluer, & ce modèle d'évaluation a dû être le plus simple qu'il étoit possible. La figure quarrée a toute la simplicité que l'on peut désirer: les angles droits étant invariables, un seul côté suffit à la détermination du quarré; c'est donc avec raison qu'on l'a choisi pour être le modèle d'évaluation de toutes les surfaces, c'est-à-dire, qu'une surface sera jugée plus ou moins grande, à proportion qu'elle contiendra plus ou moins de fois le modèle qui servira à l'estimer.

163. Nous avons employé les toises, les pieds, les pouces, les lignes, les points à la mesure des longueurs: nous nous en servons encore à l'évaluation des surfaces; mais alors on doit entendre des toises quarrées, des pieds quarrés, &c. Une toise quarrée est une surface quarrée, qui a une toise en long & une toise en large. Le pied quarré est aussi une surface longue d'un pied & large d'autant; entendez la même chose du pouce quarré, de la ligne quarrée, & du point quarré. Les Arpenteurs ou les Artisans appellent *des toises courantes*, *des pieds courans*, &c., les toises ou les pieds avec lesquels on mesure les longueurs, pour

10 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

les distinguer des toises quarrées ou des pieds quarrés qui servent à mesurer les surfaces.

164. Quand il faut mesurer une étendue considérable de terrain, en l'évaluant en toises, le nombre qui en exprime la valeur, devient si grand, qu'il apporte de l'embarras dans le calcul : c'est pourquoi on a établi des mesures plus grandes que la toise. Les plus ordinaires ou les plus généralement connues sont la *perche* & l'*arpent*. La perche varie suivant les différentes Coutumes; c'est à celui qui va faire des Arpentages dans un pays, d'en prendre connoissance chez le Juge du lieu : à Paris la perche contient trois toises, ou dix-huit pieds; pour les travaux Royaux, elle a vingt-deux pieds. Ainsi la perche quarrée, mesure de Paris, est un quarré qui a trois toises de long sur trois toises de large. L'arpent contient cent perches quarrées, c'est-à-dire, en le considérant comme un quarré, qu'il contient dix perches de longueur sur dix perches de largeur; ainsi que nous allons le démontrer par le Problème suivant.

PROBLÈME LXXI.

165. Déterminer la surface d'un rectangle qui a huit toises de long sur cinq toises de large (*fig. 13.*).

RÉSOLUTION.

Multipliez la longueur 8 par la largeur 5 : le produit 40 indiquera que le Rectangle ABCD contient 40 toises quarrées.

DÉMONSTRATION.

Divisez le côté AB en huit parties égales, qui représenteront les huit toises en longueur que contient le Rectangle. Divisez aussi en cinq parties égales la largeur AD. Par les points de division de la

longueur AB, tirez des parallèles à la ligne AD; & par chaque point de division de la largeur AD, menez des parallèles à la longueur AB: il est évident que ces lignes par leur mutuelle intersection donneront des toises quarrées, puisque (const.) chaque petite surface AOSX est aussi longue que large, AO & AX représentant chacune une toise, & l'angle A qu'elles forment étant droit, par la supposition; mais la bande ABMX contient huit petits quarrés: il y a cinq bandes égales à celle-ci; on a par conséquent 5 fois 8 = 40 petits quarrés qui représentent 40 toises quarrées. Pour déterminer la valeur d'un Rectangle, il suffit donc de multiplier sa longueur par sa largeur. C. Q. F. D. (a).

166. Puisque l'on évalue en toises quarrées la surface d'un Rectangle qui a 8 toises de base sur 5 de hauteur, en multipliant 8 par 5, il s'ensuit que l'on trouvera aussi la valeur d'une toise quarrée en pieds quarrés, en multipliant sa longueur 6 par sa largeur 6 = 36 pieds quarrés, c'est-à-dire, 36 petites surfaces qui ont chacune un pied de long sur un pied de large. Par la même raison un pied quarré = 144 poudres quarrés; car un pied quarré a 12 poudres de longueur sur 12 poudres de largeur: or 12 fois 12 = 144; par conséquent la toise

(a) Il sera facile de faire remarquer aux Commencans, que la plus grande partie de nos appartemens sont des Rectangles. En général les Ouvrages de l'Art sont des figures régulières ou symétriques, parce qu'elles sont plus agréables, plus commodes, & même plus économiques. L'ame embrasse d'une seule vue une construction symétrique, elle se la rappelle avec facilité; l'esprit n'a point à travailler, il n'a, pour ainsi dire, qu'à jouir. Voilà la source de l'agrément.

La commodité est une suite de la régularité ou de la symétrie; une forme symétrique étant déterminée, il est plus aisé de s'arranger que de changer à chaque instant de disposition. comme on y est forcé dans les emplacements bisayres.

Entre les formes régulières ou symétriques, le Rectangle a dû avoir la préférence, parce que le corps de l'homme fait naturellement un angle droit, lorsqu'il se tient debout; c'est l'afficte la plus solide, ainsi que nous l'avons observé dans un autre endroit.

12 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

quarrée contient 36 fois 144 pouces quarrés = 5184
pouces quarrés. Le pouce quarré ayant aussi 12
lignes de long sur 12 lignes de large, vaudra 144
lignes quarrées ; & si l'on divise la ligne courante
en 12 parties que l'on appelle *points*, la ligne
quarrée contiendra 144 points quarrés. En cal-
culant toujours sur le même principe, la perche
quarrée (mesure de Paris) = 9 toises quarrées,
puisque'elle contient 3 toises de long sur 3 toises
de large ; enfin l'arpent ayant 10 perches en lon-
gueur & 10 perches en largeur, doit valoir 100
perches quarrées : car 10 fois 10 = 100 ; ce
que nous avons promis de démontrer sur la fin
du n°. 164.

Afin que ces mesures se trouvent plus facilement
au besoin, nous allons en faire une Table mé-
thodique.

*TABLE des mesures les plus usitées dont on se
sert dans l'Arpentage, ou la mesure des Terreins.*

L'arpent vaut	100 perches quarrées, ou 900 toises quarrées.
La perche courante	3 toises courantes, ou 18 pieds.
La perche quarrée	9 toises quarrées, ou 324 pieds quarrés.
La toise courante	6 pieds courans, ou 72 pouces.
La toise quarrée	36 pieds quarrés.
Le pied courant	12 pouces courans.
Le pied quarré	144 pouces quarrés.
Le pouce courant	12 lignes courantes.
Le pouce quarré	144 lignes quarrées.
La ligne courante	12 points courans.
La ligne quarré	144 points quarrés.

167. Les Géomètres appellent ordinairement la

MESURE DES TERREINS. 15

longueur d'un Rectangle *sa base*, & *hauteur* ce que nous avons nommé largeur; de sorte que chez eux, multiplier la base par la hauteur, est la même chose que multiplier la longueur par la largeur. En général on prend pour base d'un parallélogramme ou d'un Triangle, le côté sur lequel on abaisse une perpendiculaire de l'angle opposé.

PROBLÈME LXXII.

168. Mesurer la surface du Triangle rectangle ABC (*fig. 14.*), dont la base = 7 pieds & la hauteur, 3.

RÉSOLUTION.

On sçait qu'un Triangle rectangle est celui qui a un angle droit

Multipliez la base BC par la hauteur AB, c'est-à-dire, 7 par 3 = 21; & prenez la moitié de ce produit = $10\frac{1}{2}$: cette moitié est la valeur en toises carrées du Triangle rectangle ABC.

DÉMONSTRATION.

Par le point C tirez CD, égale & parallèle à BA, & menez AD: on aura alors le Rectangle ABCD, dont le Triangle ABC est la moitié; mais pour avoir la valeur du Rectangle ABCD, il faut multiplier la base 7 par sa hauteur 3, & prendre le produit 21 tout entier (n°. 165.); on aura donc la mesure de la moitié de ce Rectangle, c'est-à-dire, la mesure du Triangle ABC, en prenant la moitié du produit $21 = 10\frac{1}{2}$; C. Q. F. D.

169. Si toutes les figures irrégulières pouvoient se diviser en Triangles rectangles, toute la théorie de la mesure des terrains se trouveroit renfermée dans les problèmes 71, 72. Mais comme il est fort rare de trouver cet avantage, que les Triangles *mesurés*

14 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

ables sont presque tous acutangles ou obtusangles; que par-là ils appartiennent à des parallélogrammes obliques dont ils sont la moitié, comme on peut le voir par la figure 13, où le Triangle ABC obtusangle en B est la moitié du parallélogramme oblique ABCD, les premiers Géomètres se mirent à rechercher les moyens de mesurer les parallélogrammes obliques (a), & cette découverte nous devoit nécessairement tout ce qui restoit à sçavoir sur la mesure des surfaces planes terminées par des lignes droites. En cas que le parallélogramme oblique eût quelque rapport au Rectangle, & que l'on pût déterminer ce rapport, la mesure du Rectangle étant au monde ce qu'il y a de plus simple, on avoit, avec toute l'élégance possible, tout ce que l'on pouvoit désirer sur cette matière. Or c'est ce qui a été découvert; on a trouvé qu'un parallélogramme oblique étoit parfaitement égal à un Rectangle de même base & de même hauteur que l'oblique. Démontrons cette vérité si belle, parce qu'elle est si utile. On se rappellera que la hauteur d'un point au-dessus d'une ligne & d'un objet au-dessus d'un plan, s'estime nécessairement par la perpendiculaire qui tombe sur la ligne au-dessus de laquelle ce point s'élève; par exemple, que la hauteur du point D (fig. 26.) au-dessus de la ligne AB, n'est pas la ligne DA, mais la perpendiculaire DM, qui est le plus court chemin du point D à la ligne AB. Il faut aussi faire attention qu'être situé entre mêmes parallèles, signifie précisément la même chose qu'être de même hau-

(a) Le Parallélogramme oblique ne sçauroit être pris pour servir de mesure commune à toutes les surfaces, parce qu'une toise en Losange ne seroit pas une figure déterminée; elle auroit plus ou moins de surface, à proportion que ses angles obtus seroient plus ou moins ouverts. En sorte qu'on pourroit la réduire presque à rien, en rendant ses angles extraordinairement obtus; au contraire la toise quarrée, en gardant toujours la longueur de ses côtés, ne sçauroit avoir ni plus ni moins de surface qu'elle en a.

teur, parce que les parallèles gardent toujours entr'elles une égale distance ; mais l'inverse de cette proposition est fautive : car on peut être de même hauteur sans être situé entre mêmes parallèles.

PROPOSITION XV.

170. Le parallélogramme oblique $ABCD$ (*fig. 16.*) est égal en surface à un parallélogramme rectangle de même base & de même hauteur ; c'est-à-dire, dont la base est égale à la base de l'oblique, & la hauteur égale à la hauteur de l'oblique.

DÉMONSTRATION.

Abaissez la perpendiculaire DM sur AB , & la perpendiculaire CO sur le prolongement BO . Ces perpendiculaires sont égales, étant entre mêmes parallèles ; & elles forment le Rectangle $DMOC$, dont la base $MO = DC = AB$, base du parallélogramme oblique. Ainsi les deux parallélogrammes $ABCD$, $DMOC$, ont même base & même hauteur ; or il est évident que ces deux parallélogrammes sont égaux ; car ils sont composés chacun de deux surfaces égales, chacune à chacune. Le Rectangle $DMOC$ contient le Triangle CBO , & le Trapèze $DMBC$; de même le parallélogramme oblique $ABCD$ contient le Trapèze $DMBC$, & le Triangle DAM égal au Triangle CBO , à cause que tous leurs côtés sont visiblement égaux, chacun à chacun : car (par la const.) $BC = AD$, $CO = DM$. Il reste donc à démontrer que $BO = AM$. Remarquez que $MB + BO = DC$. Or $DC = AM + MB$; parce que (n°. 153.) les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux. Ainsi $MB + BO = AM + MB$; & ôtant MB de part & d'autre, on a $BO = AM$; donc le Triangle DAM est égal au Triangle CBO ;

16 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

(n°. 151.) par conséquent le parallélogramme oblique ABCD est égal au Rectangle DMOC, qui a même base & même hauteur; C. Q. F. D.

Cette Démonstration me paroît beaucoup plus simple que celle des Anciens, que l'on trouve dans tous les Livres des Modernes. Néanmoins on peut encore la resserrer.

Démonstration plus concise.

La perpendiculaire DM retranche le Triangle DMA; mais l'autre perpendiculaire CO ajoute le Triangle CBO = DMA; on regagne donc d'un côté ce que l'on perd de l'autre, & par conséquent l'égalité subsiste (a).

La converse de cette Proposition est fautive. Nous prouverons un peu plus bas (n°. 175.) qu'il est faux que des parallélogrammes égaux en surface, aient nécessairement même base & même hauteur.

PROPOSITION XVI.

171. Deux parallélogrammes obliques (fig. 17.) qui ont des bases & des hauteurs égales, sont nécessairement égaux en surface, quoiqu'ils soient différemment inclinés.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le parallélogramme oblique DABC est égal en surface au parallélogramme oblique MGFX, dont la base & la hauteur sont égales à la base & à la hauteur du parallélogramme DABC, qui est moins incliné.

(a) Ces sortes de démonstrations, qui montrent d'un coup d'œil l'esprit de la chose, m'ont toujours réussi auprès des jeunes gens; je conseille que l'on en fasse usage; elles ont un air familier qui prévient. On se fait très-bien entendre dans une conversation, quoique les Démonstrations ne soient pas aussi régulières que dans un Livre.

Abaissez

MESURE DES TERREINS. 17

Abaissez les perpendiculaires DO, CS, XN, PH. Par la Proposition précédente (n°. 170.), le parallélogramme oblique DABC = le Rectangle DOSC de même base & de même hauteur. Par la même raison, le parallélogramme oblique XMGP = le Rectangle XNHP. Mais le rectangle DOSC = le Rectangle XNHP, puisque tous les angles & tous les côtés de l'un sont égaux à tous les angles & à tous les côtés de l'autre, chacun à chacun (const); par conséquent les deux parallélogrammes DABC, XMGP, différemment inclinés, mais qui ont même base & même hauteur, sont aussi égaux en surface; C. Q. F. D.

PROPOSITION XVII.

172. Les triangles ABC, MDH, dont les bases BC, DH, sont égales, & qui ont même hauteur, ont des surfaces égales (*fig. 18*).

DÉMONSTRATION.

Par le point C menez CS, parallèle & égale à BA, & tirez AS. Faites pareillement HG parallèle & égale à DM; tirez encore MG. Il est clair (n°. 171.) que les deux parallélogrammes ABCS, DHGM, de même base & de même hauteur, sont égaux. Or les triangles ABC, MDH sont moitiés de ces parallélogrammes égaux (n°. 154.); ces deux Triangles sont donc égaux en surface; C. Q. F. D.

La converse de cette Proposition est fautive; ce que je démontrerai dans la suite (n°. 177.).

173. Il n'est pas possible de porter plus loin l'art de mesurer les Terreins. L'irrégularité la plus singulière ou la plus recherchée, peut à la vérité multiplier le travail des mains; mais elle sera toujours soumise à la méthode de mesurer les surfaces les plus simples & les plus uniformes.

20 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

tre parallélogramme, dont la base seroit 6 toises & la hauteur 4, auroit aussi en surface 24 toises quarrées : des parallélogrammes peuvent donc avoir des surfaces égales, sans être de même base ni de même hauteur ; C. Q. F. D.

REMARQUE.

176. On observera qu'il est beaucoup plus expéditif dans la pratique d'abaisser la perpendiculaire DM de l'angle obtus D, afin qu'elle tombe au dedans du parallélogramme, s'il n'y a point d'obstacle, que de la faire tomber de l'angle aigu C ; parce qu'elle tomberoit alors au dehors du parallélogramme, ce qui exigeroit que l'on prolongeât la base AB jusqu'à la rencontre O de la perpendiculaire CO. Cette remarque est encore plus essentielle quand on opère sur un Triangle : car on ne peut alors abaisser de perpendiculaire que du point D, au lieu que de quelque point du côté DC que l'on abaisse une perpendiculaire sur la base AB, elle fera toujours égale à DM.

PROBLÈME LXXIV.

177. Déterminer l'aire ou la surface du Triangle oblique ABC (*fig. 19*).

RÉSOLUTION.

De l'angle obtus B, si vous le pouvez, abaissez la perpendiculaire BD, en vous servant de l'équerre d'Arpenteur ; & mesurez cette perpendiculaire qui contient, par exemple : 12 toises 1 pied 5 pouces. Mesurez aussi la base AC, où vous pourrez trouver 24 toises 8 pouces. Réduisez en pouces ces deux dimensions. Commençons par la perpendiculaire $BD = 12 \text{ toises } 1 \text{ pied } 5 \text{ pouces}$. On sçait qu'une toise $= 72 \text{ pouces}$; ainsi 12 toises $= 12$

fois $72 = 864$ pouces, auxquels ajoutant 1 pied 5 pouces $= 17$ pouces, on aura 881 pouces pour la perpendiculaire BD.

Réduisons aussi en pouces la base $AC = 24$ toises 8 pouces, en multipliant 24 par $72 = 1728$ pouces; ajoutez-y 8 pouces, la base sera 1736 pouces. Il faudroit présentement multiplier la base 1736 par la perpendiculaire 881, & prendre la moitié de ce produit, qui seroit la valeur en pouces quarrés du Triangle proposé; mais il est plus court de multiplier la moitié de la base $1736 = 868$ par $881 = 764708$ pouces quarrés, qui est la valeur du Triangle proposé: vous réduirez en toises quarrées les 764708 pouces quarrés en divisant 764708 par 5184, parce que la toise quarrée contient 5184 pouces quarrés; ce qui se connoît en multipliant 72 pouces par 72 pouces. Divisant donc 764708 par 5184, on doit trouver 147 toises quarrées, & 2660 pouces quarrés, lesquels réduits en pieds quarrés, donneront 18 pieds quarrés & 68 pouces quarrés; ce que l'on trouvera en divisant 2660 par 144, à cause que le pied quarré $= 12$ fois $12 = 144$ pouces quarrés. La valeur du Triangle ABC est donc 147 toises 18 pieds 68 pouces quarrés.

Si l'on veut avoir cette valeur en perches quarrées, comme la perche quarrée $= 9$ toises quarrées, on divisera 147 par 9, ce qui donnera 16 perches & 3 toises quarrées; de sorte que la surface du Triangle ABC contiendra 16 perches 3 toises 18 pieds 68 pouces quarrés.

DÉMONSTRATION.

On doit prouver que l'on a la surface ou l'aire d'un Triangle oblique, en multipliant sa hauteur perpendiculaire par la moitié de sa base.

On peut se rappeler qu'il a été démontré (n°. 172.)

22 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

qu'un Triangle oblique est la moitié du parallélogramme oblique de même base & de même hauteur ; que ce parallélogramme oblique est égal à un Rectanglé de même base & de même hauteur ; par conséquent un Triangle oblique est aussi la moitié d'un Rectanglé de même base & de même hauteur : or , pour avoir la valeur d'un rectangle , il faut multiplier sa base par sa hauteur ; donc pour avoir la valeur du Triangle qui est sa moitié , on ne doit multiplier la hauteur que par la moitié de la base ; mais c'est ce que nous avons fait. Il est donc clair que nous devons avoir la surface du Triangle proposé ; C. Q. F. D.

Par la résolution de ce problème il est facile de prouver la fausseté de la converse de la Proposition 17 (n° 172.) ; je veux dire , que des Triangles qui ont des surfaces égales , n'ont pas nécessairement même base & même hauteur ; car un Triangle qui auroit 10 toises de base sur 4 de hauteur , auroit en surface 20 toises quarrées ; mais un autre Triangle dont la base contiendrait 8 toises & la hauteur 5 , auroit aussi en surface 20 toises quarrées ; par conséquent des Triangles peuvent avoir des surfaces égales , sans être de même base ni de même hauteur.

On voit aussi par cet exemple que la converse de la Proposition 14 (n° 151.) est fautive , c'est-à-dire , qu'il n'est pas vrai que des Triangles égaux en surface aient nécessairement tous leurs côtés égaux , chacun à chacun (a).

(a) Nous ne devons pas aller plus loin sans tenir la parole que nous avons donnée n° 67. Nous avons promis de dire pourquoi certaines Propositions ont des converses , pourquoi d'autres n'en ont pas , &c.

Afin qu'une Proposition puisse être convertie , il est nécessaire que cette Proposition ait deux parties , dont l'une soit la conséquence de l'autre , ou tout au moins soit regardée comme telle. Par exemple , si l'on tire une diagonale OS dans un parallélogramme AODS , (fig. 20.) ce parallélogramme sera divisé en deux parties égales. Il est évident que cette Proposition a deux parties , La première , qu'on suppose que

REMARQUE.

178. On observera que l'on pouvoit multiplier la hauteur par la base toute entière; mais on n'auroit pris alors que la moitié du produit, ce qui auroit donné le même résultat : ou bien multiplier la base entière par la moitié de la hauteur, ce qui revient au même que de multiplier la hauteur par la moitié de la base; mais on doit éviter de prendre la moitié d'un nombre impair, afin de ne pas tomber dans les fractions, dont le calcul est toujours plus embarrassant que celui des nombres entiers : c'est pourquoi si la base & la hauteur du Triangle étoient exprimées par des nombres impairs, on multiplieroit la base par la hauteur, & la moitié de ce produit exprimeroit la véritable valeur du Triangle.

L'on tire une diagonale dans un parallélogramme; & la seconde, que l'on regarde comme une suite de la première, c'est que ce parallélogramme sera divisé en deux parties égales. Ainsi pour avoir la converse de cette Proposition, mettons en supposition la seconde partie. Supposons qu'un parallélogramme soit divisé en deux parties égales; si l'on vouloit en déduire que ce parallélogramme ne peut être ainsi divisé que par une diagonale, ce seroit la converse de la première Proposition; mais cette converse seroit très-fausse, parce qu'un parallélogramme peut être divisé en deux parties égales par la ligne MN tirée par le milieu des côtés AS, OD, & cette ligne MN n'est pas une diagonale. Les Géomètres appellent la première partie d'une Proposition l'hypothèse, c'est-à-dire, les suppositions ou les données, d'où l'on déduit ce que l'on se propose d'établir; car il n'est pas possible de démontrer quelque chose à ceux qui n'accordent rien; & ils nomment conséquence ce qui est déduit de l'hypothèse.

On a donc un caractère pour reconnoître la vérité ou la fausseté d'une Proposition converse. Si la conséquence redonne nécessairement l'hypothèse, la converse est vraie; mais elle est fausse, lorsque l'hypothèse n'est pas une suite nécessaire de la conséquence.

On ne sauroit convertir une Proposition, dont la conséquence dit précisément la même chose que l'hypothèse. Ainsi cette Proposition; *si l'on a un Triangle, ses trois angles sont nécessairement égaux à deux angles droits*, est une Proposition qui n'a point de converse; vous ne pouvez pas dire, *si les trois angles d'un Triangle sont égaux à deux angles droits, on aura nécessairement un triangle*; cela ne signifieroit rien; aussi ces sortes de Propositions doivent s'exprimer sans aucune condition; *les trois angles d'un triangle sont égaux à deux angles droits*; où l'on voit qu'il n'y a point de converse à faire.

B iv

24 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

179. Il peut se rencontrer quelque obstacle qui empêche que l'on n'abaisse une perpendiculaire de l'angle obtus B (*fig. 21.*) sur la base AC. En ce cas on prolongera l'un des deux autres côtés CB, jusqu'à ce que de l'angle opposé A, on puisse abaisser la perpendiculaire AD sur le prolongement BD. Après quoi l'on mesurera BC, qui devient alors la base du Triangle, & AD qui en exprime la hauteur : on multipliera, comme ci-devant, BC par AD. La moitié de ce produit sera la valeur du Triangle ABC.

PROBLÈME LXXV.

180. Evaluer la surface d'un Trapèze ABCD, c'est-à-dire d'une figure de quatre côtés, dont on en suppose deux tels que AD, BC parallèles (*fig. 22.*).

RÉSOLUTION.

De l'angle D abaissez la perpendiculaire DM sur l'un des côtés BC parallèles, ou, s'il y a de l'obstacle, de l'angle C faites tomber la perpendiculaire CS sur le prolongement DS de l'autre côté AD parallèle. Cette perpendiculaire $CS = DM$, à cause de AD parallèle à BC (supp.) ; mesurez donc DM ou CS que vous trouverez, par exemple, de 4 perches. Mesurez aussi les côtés parallèles AD, BC. Supposons $AD = 3$ perches 2 toises, & $BC = 6$ perches 1 toise. Prenez la somme des deux côtés parallèles $AD, BC = 10$ perches. Multipliez 10 perches par 4 valeur de la perpendiculaire ; vous aurez 40 perches quarrées, dont la moitié $= 20$ sera la valeur du Trapèze ABCD.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que l'on a la surface du Trapèze ABCD, en prenant la moitié du produit de

MESURE DES TERREINS. 25

la somme des deux côtés parallèles AD , BC , par la perpendiculaire DM qui exprime la distance d'un côté à l'autre.

Tirez la diagonale BD : le Trapèze $ABCD$ est alors divisé en deux Triangles ABD , DBC , qui ont même hauteur DM . Or la valeur du Triangle DBC (n°. 177.) est la moitié du produit de la base BC par la hauteur DM ; par la même raison la valeur du Triangle BAD se trouve, en prenant la moitié du produit AD par la perpendiculaire DM . Par conséquent on a la valeur de tout le Trapèze, en prenant la moitié du produit des deux bases BC , AD , par la perpendiculaire DM , qui exprime la distance d'une base à l'autre.

R E M A R Q U E.

181. Au lieu de multiplier la somme des deux côtés parallèles par la perpendiculaire DM , & prendre ensuite la moitié de ce produit, on auroit pu multiplier seulement ces deux côtés par la moitié de la perpendiculaire, ou la perpendiculaire toute entière par la moitié de la somme de ces deux côtés, & en ce cas le produit tout entier auroit été la valeur du Trapèze; mais on seroit tombé dans les fractions; ce que l'on doit toujours éviter.

La résolution des Problèmes précédens suffit pour faire comprendre, comment l'on peut trouver l'aire des surfaces planes terminées par des lignes droites, de quelque nombre de côtés qu'elles puissent être : qu'elles soient régulières ou irrégulières, cela n'y fait rien; on pourra toujours les réduire en Rectangles, en Trapèzes, en Triangles : on ne les divisera même, si l'on veut, qu'en Triangles; mais il est souvent plus commode d'y tracer des Rectangles & des Trapèzes : c'est la figure du Terrain qui détermine ces sortes d'opérations, comme on va le voir dans les Problèmes suivans.

PROBLÈME LXXVI.

182. Mesurer le Quadrilatère ABCD, dont un des angles A est droit (*fig. 23*).

R É S O L U T I O N.

On pourroit tirer une ligne de l'angle D au point B. Elle diviserait le Quadrilatère en deux Triangles, dont on chercheroit séparément la valeur : ces deux valeurs réunies donneraient celle du Quadrilatère ; mais en s'y prenant d'une autre façon, on pourra avoir plus commodément la surface ou l'aire du Quadrilatère ABCD. De l'angle C abaissez la perpendiculaire CG sur le côté AB ; mesurez cette perpendiculaire : faites $AM = CG$; on aura $MC = AG$. Par-là vous réduisez le Quadrilatère ABCD en deux Triangles rectangles CGB, CMD, & au Rectangle CGAM, dont il est très-facile d'avoir la valeur : car la surface du Triangle $CGB = \frac{CG \times GB}{2}$; celle du Rectangle CGAM $= CG \times GA$, ou $CG \times CM$; enfin celle du Triangle $CMD = \frac{CM \times MD}{2}$: ajoutant ces trois produits ensemble, leur somme donnera la valeur du Quadrilatère ABCD. Cela n'a pas besoin de démonstration.

PROBLÈME LXXVII.

183. Trouver la surface de l'Eptagone irrégulier ABCDEFG, qui peut servir de modèle pour toutes les figures irrégulières (*fig. 24*).

R É S O L U T I O N.

De l'angle A à l'angle E le plus éloigné, tracez la ligne AE : sur cette ligne abaissez les perpendi-

culaires GO, FR, DP, CS, BO; vous aurez quatre Triangles rectangles & trois Trapèzes, dont les mesures réunies (n°. 166. & 180.) donneront celle de l'Eptagone irrégulier; ce qui est évident.

Ou, si vous l'aimez mieux, de l'angle C aux angles A, G, F, E, tirez les lignes CA, CG, CF, CE; ces lignes diviseront l'Eptagone en cinq Triangles que vous mesurerez séparément. Vous ferez une addition de la valeur de ces cinq Triangles; leur somme donnera l'aire de l'Eptagone proposé.

Cette dernière opération sera moins expéditive que la première, parce que dans le premier cas les bases de tous les Triangles & de tous les Trapèzes se trouvent sur la même ligne AE, au lieu que dans la dernière figure toutes les bases pourront être différentes lignes: ce qui multipliera les embarras.

PROBLÈME LXXVIII.

184. Trouver la surface d'une pièce de terre ABCD (*fig. 25.*), bornée par la Rivière RR, dont la rive n'est pas en ligne droite.

RÉSOLUTION.

Divisez la rive où aboutit la pièce de terre en plusieurs parties qui soient sensiblement droites, comme AO, OS, SM, &c. Des points C, B, imaginez les lignes CM, CN, CT, BO, BS, BM; ces lignes diviseront la pièce de terre en Triangles, qui différeront très-peu de Triangles rectilignes; mesurez donc ces Triangles à l'ordinaire, pour avoir dans leur somme la valeur du terrain ABCD.

PROBLÈME LXXIX.

185. Mesurer la surface d'un Polygone régulier ABCDEF (*fig. 26.*), par exemple, d'un Salon hexagone, ou de tout autre Polygone régulier.

R É S O L U T I O N ,

Elle est beaucoup plus facile que les précédentes. Du centre O abaissez sur un des côtés AB la perpendiculaire OS; mesurez cette perpendiculaire, aussi-bien que le côté AB, sur lequel elle tombe; multipliez OS par AB; prenez la moitié de ce produit, que vous multipliez encore par le nombre des côtés du Polygone, c'est-à-dire, ici par 6 : ce dernier produit sera la valeur du Polygone proposé.

D É M O N S T R A T I O N .

Tirez les lignes OA, OB, OC, &c. il y aura autant de triangles égaux que le Polygone a de côtés; par conséquent la surface de ce Polygone sera égale à celle du Triangle AOB, pris autant de fois qu'il y a de côtés : or c'est ce que nous avons fait, en multipliant par 6 la moitié du produit de AB par OS, valeur du Triangle AOB; C. Q. F. D.

P R O B L È M E L X X X .

Changer une figure, telle que le Triangle BAC (*fig. 27.*), en une autre figure qui ait un nombre quelconque de côtés, sans avoir néanmoins plus de surface que le triangle ABC.

R É S O L U T I O N .

Afin de simplifier la résolution de ce Problème, proposons-nous seulement de changer le Triangle ABC en une figure qui ait un côté de plus, c'est-à-dire, en une figure de quatre côtés.

D'un angle A quelconque de ce Triangle, tirez au côté opposé BC une ligne quelconque AD. Par un des deux autres angles B, tirez une ligne indéfinie BS parallèle à la ligne AD; & du point A

tirez une ligne AP, qui coupe la parallèle indéfinie BS en un point quelconque P. Enfin de ce point P au point D tirez la ligne PD; elle donnera une figure ACDP de quatre côtés, qui n'aura pas plus de surface que le triangle ACB.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que la figure ACDP a précisément la même surface que le Triangle ACB. Remarquez d'abord que ces deux figures ont une partie commune ACDO. Reste donc à démontrer que l'autre partie AOP, est égale à l'autre partie BOD. Considérez donc les deux Triangles PAD, BAD, de même base AD, & qui sont entre les mêmes parallèles BP, DA (par la construction) : ces deux Triangles ont donc même base & même hauteur; ils sont donc égaux en surface (n°. 172.); par conséquent les deux parties de l'un prises ensemble, sont égales aux deux parties de l'autre aussi prises ensemble : mais ces deux Triangles ont de commun la partie DOA; c'est donc une nécessité que la seconde partie BOD soit égale à la seconde partie AOP, & par conséquent que la figure ACDP de quatre côtés soit égale en surface au Triangle BAC; C. Q. F. D.

La construction de ce problème est d'autant plus facile, que l'on peut tirer à volonté les lignes AD, AP. Cependant, comme on préfère les terrains réguliers, ou approchans de la régularité à ceux qui ne le sont pas, si l'on veut transformer le Triangle ABC en un parallélogramme (*fig. 28.*), de l'angle A tirez AD sur le milieu de BC; & après avoir mené l'indéfinie BS parallèlement à AD, par le point A, vous menerez encore AP parallèle à BC. Tirez présentement PD : vous aurez le parallélogramme CAPD égal en surface au Triangle BAC, ce qui n'a pas besoin de démonstration.

30 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

On se servira du même artifice pour transformer le parallélogramme $ACDP$ (*fig. 29.*) en une figure de cinq côtés de même surface que ce parallélogramme, c'est-à-dire, que d'un angle A quelconque de ce parallélogramme, on menera AG en un point quelconque G , entre P & D ; il faudra tirer ensuite l'indéfinie PS parallèlement à GA , & du point A mener une ligne quelconque AO , laquelle faisant un angle quelconque avec le côté CA , coupe l'indéfinie PS en un point O . De ce point si l'on tire OG , la figure $CDGOA$ aura cinq côtés, & n'aura pas plus de surface que le parallélogramme $ACDP$. La démonstration est la même que ci-dessus. En continuant ainsi de transformer une figure en une autre qui ait un côté de plus, on pourra toujours donner à une figure tel nombre de côtés que l'on voudra, sans changer en rien la valeur de sa surface : ainsi le Problème est résolu généralement.

Par une opération contraire, vous réduirez une figure d'un nombre quelconque de côtés, en une autre qui en ait deux, trois, quatre, &c. de moins, pourvu qu'il ne soit pas question de la réduire en une figure qui ait moins de trois côtés : car alors le Problème seroit impossible; j'en proposerai seulement un exemple; ce Problème n'étant que le retour du précédent.

Soit donc la figure $ABCDE$ (*fig. 30.*) de cinq côtés, qu'il s'agit de réduire en une figure qui n'en ait que trois, & qui ait pourtant la même surface que la figure de cinq.

Réduisons-là d'abord à quatre côtés. Pour cela tirons AD , & par le point F menons-lui la parallèle indéfinie FS ; prolongeons le côté BA jusqu'à ce qu'il coupe la parallèle FS en un point O . De ce point tirons la ligne OD : je dis que la figure

ODCB de quatre côtés, a la même surface que le pentagone irrégulier ABCDFA.

Car on voit, comme ci-dessus, que ces deux figures ont la partie commune CDLAB, & qu'à cause des Triangles AOD, AFD, de même base & de même hauteur, la partie LFD est égale à la partie LOA; ainsi la figure de quatre côtés a précisément la même surface que le pentagone irrégulier.

On réduira ensuite la figure de quatre côtés OBCD au Triangle SDC (*fig. 31.*) de même surface, comme on le voit par la construction de la figure; & par conséquent la figure ABCDF (*fig. 30.*) de cinq côtés, se trouvera réduite en une figure de trois (*fig. 31.*), qui aura précisément la même surface; C. Q. F. T. & D.

R E M A R Q U E.

Tant que l'on peut se passer de contrats de vente; s'est toujours le mieux. On économise l'argent & le tems: c'est à quoi le problème du n°. 185 peut être fort utile. Par son moyen on pourroit faire l'échange de Terreins voisins, sans être obligé de vendre ou d'acheter; dans le cas, par exemple, où l'on voudroit donner à l'emplacement d'un Château ou d'un jardin une autre figure plus régulière ou plus commode, que celle d'un Terrain proposé.

186. Dans toutes les opérations précédentes, nous avons supposé que l'on pouvoit parcourir l'intérieur du terrain, dont on proposoit de trouver la mesure: cependant il est un très-grand nombre de circonstances où cela n'est pas possible; un bassin rempli d'eau, une forêt, un lac, un marais impraticable, un terrain embarrasé ou trop couvert, ne permettent pas que l'on trace des lignes au dedans de leur figure. Il faut les évaluer, si l'on peut, par la seule connoissance des côtés extérieurs qui les terminent;

pour cela il y a plusieurs moyens ; nous allons exposer ceux qui sont les plus faciles à comprendre , comme les plus propres à entretenir dans les jeunes gens le goût de cultiver leur raison.

Supposons donc qu'il s'agisse de mesurer le Triangle ABC (*fig. 19.*) obtusangle, c'est-à-dire, dont un des angles B est obtus ; qu'il ne soit pas possible de parcourir l'intérieur de ce Triangle, ni comme d'en prolonger les côtés AB, CB, afin d'abaisser des perpendiculaires sur le prolongement. On mesurera les trois côtés AB, BC, CA : mais cette connoissance ne suffit pas ; il faudroit encore avoir la valeur d'une perpendiculaire. Imaginons la perpendiculaire BD que l'on ne sçauroit parcourir : si nous pouvions la déterminer par la simple connoissance des trois côtés de ce Triangle, on en trouveroit la surface à l'ordinaire.

On s'aperçoit que la perpendiculaire BD divise le triangle obtusangle ABC en deux triangles rectangles ADB, BDC ; or les Géomètres ont découvert une propriété du triangle rectangle, qui nous servira à trouver la véritable longueur de la perpendiculaire BD, quoiqu'il ne soit pas possible de lui appliquer aucune mesure. Cette propriété va être énoncée dans la proposition suivante.

PROPOSITION XVIII (a).

187. Soit le triangle ABC (*fig. 32.*) rectangle en B. On appelle *hypothénuse* le côté AC opposé

(a) On n'a mis ici cette Proposition, qu'en faveur de ceux qui n'auroient pas le dessein d'aller plus loin que les deux premiers Livres ; car sa véritable place, par rapport à tout l'ouvrage, est d'être la ving-tseptième dans l'ordre des Propositions, comme on le verra au Chapitre des lignes proportionnelles, n°. 293. où cette Proposition est démontrée beaucoup plus facilement ; c'est pourquoi la Proposition qui suivra celle-ci, est véritablement la dix-huitième ; elle doit se déduire immédiatement de la dix-septième, & non pas de celle dont il est ici question.

à l'angle droit B. Sur cette hypothénuse faites le carré AOSC. Faites aussi des carrés sur les deux autres côtés AB, BC. On a trouvé que le carré AOSC de l'hypothénuse, est égal à la somme des carrés ABMG, BCDF, construits sur les deux autres côtés AB, BC.

DÉMONSTRATION.

De l'angle droit B, abaissez sur l'hypothénuse AC la perpendiculaire BPR ; elle divise le grand carré en deux rectangles AORP, PRSC. Si l'on démontre que le petit rectangle AORP = le petit carré ABMG, & que l'autre rectangle PRSC = l'autre carré BCDF, on aura démontré que le grand carré AOSC = les deux carrés ABMG, BCDF.

Je dis donc premièrement, que le rectangle PRSC = le carré BCDF. Tirez les lignes BS, AD, & remarquez que le triangle BCS a même base & même hauteur que le rectangle PRSC, puisqu'en prenant CS pour base de l'un & de l'autre polygone, ils ont même hauteur, étant posés entre les mêmes parallèles BR, CS. Ainsi le triangle BCS est la moitié du rectangle PRCS : car il a été démontré qu'un triangle est toujours la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur. Vous trouverez aussi que le triangle ADC est la moitié du carré BCDF ; ces deux figures ont même base DC, & elles sont entre les mêmes parallèles DC, FBA. Par conséquent en démontrant que les deux triangles BCS, ADC sont égaux, c'est une nécessité que le rectangle PRSC & le carré BCDF, qui sont chacun doubles de ces triangles, soient aussi égaux.

Mais (n°. 172.) des triangles qui ont des bases & des hauteurs égales, sont égaux en surface : or les

triangles ADC, BCS ont des bases & des hauteurs égales ; car le triangle ADC, ayant DC pour base, aura pour hauteur $BC = DC$, à cause des parallèles DC, FA. De même le triangle BCS ayant pour base $BC = DC$, aura pour hauteur la perpendiculaire SM abaissée sur le prolongement CM. Or $SM = BC$ ou CD. Pour en être convaincu, comparez le triangle SCM avec le triangle ABC : vous verrez qu'ils ont tous leurs côtés égaux, chacun à chacun : car $CS = AC$; & en prolongeant le côté AC indéfiniment, on voit que l'angle OCM avec l'angle MCS vaut un angle droit : mais l'angle BCA avec l'angle BAC vaut aussi un angle droit ; par conséquent $OCM + MCS = BCA + BAC$. Mais l'angle $OCM = BCA$ son opposé par le sommet. Donc $MCS = BAC$; & comme les triangles CMS, ABC sont tous deux rectangles (supp.), il est clair que le troisième angle $MSC =$ le troisième angle BCA (n°. 78.). Les deux triangles CBA, CMS ont donc un côté égal, & les angles sur ce côté égaux, chacun à chacun ; par conséquent les côtés opposés à des angles égaux sont égaux (n°. 85.) : ainsi $SM = BC$.

Les deux triangles ADC, BSC ont donc même base & même hauteur ; il faut donc conclure qu'ils sont égaux en surface (n°. 172.), & par conséquent que le rectangle PRSC, & que le carré BCDF, qui sont chacun doubles de ces triangles égaux, ont aussi des surfaces égales ; C. Q. F. D. (a)

(a) Il est à propos que je prévienne un reproche que l'on me fera infailliblement. Vous pouviez, me dira-t-on, démontrer d'une manière beaucoup plus simple que le triangle ADC = le triangle BCS : d'autres l'ont exécuté. Ils ont fait voir que le triangle ADC a les deux côtés, DC, CA égaux aux deux côtés BC, CS du triangle BCS, chacun à chacun, & l'angle compris entre ces côtés égal de part & d'autre, puisque l'angle DCA est composé d'un angle droit & de l'angle BCA, & que l'angle BCS est aussi composé d'un angle droit

Secondement, on prouvera de la même manière que le petit rectangle $APRO =$ le petit carré $ABMG$ (*fig. 33.*), en tirant les lignes CG , BO ; car on trouvera facilement, comme ci devant, que le triangle $CAG =$ le triangle BOA : or le triangle CAG est la moitié du petit carré $ABMG$ situé sur la même base AG , & entre les mêmes parallèles AG , MC . Et le triangle BOA est aussi la moitié du rectangle $APRO$ de même base AO , & entre les mêmes parallèles AO , BR ; par conséquent les moitiés étant égales, les tous seront égaux, c'est-à-dire, que le rectangle $APRO =$ le carré $ABMG$; C. Q. F. D.

188. Sans changer rien à la longueur des côtés AB , BC du triangle rectangle ABC , supposons que l'angle droit ABC s'ouvre, c'est-à-dire,

& de l'angle BCA . Or, quand deux triangles ont deux côtés égaux, chacun à chacun, & l'angle compris entre ces côtés égal de part & d'autre, il est visible que ces deux triangles sont égaux en surface; & pour démontrer cette égalité, on n'est point obligé d'avoir recours à la comparaison des deux triangles SCM , ABC , comme vous avez fait.

Si j'avois voulu être l'écho des échos qui ont écrit sur la Géométrie, faire un tas de Propositions, & non pas en construire un édifice, il n'est pas douteux que j'eusse évité ce reproche; mais il faut que je le répète: en travaillant à la composition de l'Ouvrage que je donne au Public, entre plusieurs objets que je m'y suis proposés, celui de déduire une Proposition immédiatement de celle qui la précède, m'a paru mériter une attention particulière. Jusque'ici personne n'a osé le tenter: on a cru même que l'exécution n'en étoit pas possible; c'est néanmoins ce dont je suis venu à bout, & ce qui m'a imposé la nécessité de démontrer la Proposition présente par le moyen qui m'a occasionné cette Note. Autrement cette Proposition n'auroit pas été déduite immédiatement de la Proposition précédente.

Je conviens que ma Démonstration en devient un peu plus longue; mais un inconvénient aussi mince n'est pas capable de balancer les avantages que nous avons retirés de cette méthode. Elle présente à l'esprit une Généalogie non interrompue de Propositions fort simples & en assez petit nombre, avec lesquelles nous avons résolu tout ce que l'on peut tirer de plus intéressant de la Géométrie ordinaire; cela est un très-grand soulagement pour l'esprit, qui par la méthode ordinaire se trouve accablé d'une multitude de Propositions sans ordre, absolument inutiles au dessein unique que l'on devoit se proposer, d'exercer la raison des jeunes gens à des vérités réduites à quelques usages.

36 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

qu'il devienne obtus; les points A, C s'écarteront, leur distance deviendra plus grande, & par conséquent le quarré AC du côté opposé à l'angle obtus, sera plus grand que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.

Et si l'angle droit ABC se ferme ou devient aigu, les points A, C se rapprocheront, leur distance AC diminuera; ainsi le quarré du côté AC opposé à l'angle aigu, sera plus petit que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés (a).

189. D'où il suit, que la converse de la Proposition 18 (n°. 187.) est très-véritable; c'est à-dire, si un triangle est tel, que le quarré d'un de ses côtés soit égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés, ce triangle sera nécessairement rectangle: car s'il ne l'étoit pas, il ne pourroit avoir la propriété qu'on lui attribue (n°. 187.).

190. Puisque $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (n°. 187.); donc $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ ou $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$: c'est-à-dire, que si du quarré de l'hypothénuse l'on ôte un des quarrés faits sur les autres côtés, on aura le quarré de l'autre côté.

Supposons présentement $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$:

on aura $\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} = \overline{AB}$; ce qui signifie, que l'on trouvera la valeur d'un côté AB, en tirant la racine quarrée de la différence entre le quarré de l'hypothénuse & celui de l'autre côté.

191. Lorsque l'on connoît les trois côtés d'un triangle, on peut donc toujours se convaincre, s'il est Rectangle, Obtusangle ou Acutangle. Car ce

(a) On peut rendre cette Démonstration oculaire avec les jambes d'un compas. On disposera les jambes à angles droits: les ouvrant ensuite, ou les fermant, on verra leurs extrémités s'éloigner ou se rapprocher.

triangle sera équilatéral, isoscèle ou scalène. Dans le premier cas, tous ses angles sont aigus. Dans le second & le troisième cas, examinez si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés : si vous trouvez cette égalité, le triangle est rectangle. Le carré du plus grand côté surpassant la somme des deux autres carrés, le triangle est obtusangle ; enfin c'est un triangle acutangle, lorsque le carré du plus grand côté est plus petit que la somme des deux autres carrés (n°. 187).

192. Cette observation peut avoir son utilité, lorsque l'on cherche à déterminer la surface d'un triangle dont on ne peut mesurer que les trois côtés ; car si l'on trouve qu'il est rectangle, on multipliera les deux côtés qui comprennent l'angle droit, l'un par l'autre, & la moitié de ce produit donnera la surface du triangle proposé.

Supposons, par exemple, que les côtés du triangle ABC (fig. 34.) ayant été mesurés, l'on ait trouvé $AC = 10$ toises, $AB = 6$, $BC = 8$. Carré de $AC = 100$; celui de $BC = 64$, & celui de $AB = 36$. Prenez la somme des deux petits carrés 64 & $36 = 100$, valeur du carré du plus grand côté AC . Le triangle ABC est donc rectangle en B. Ainsi, en prenant BC pour base de ce triangle, AB en fera la hauteur. Multipliez donc BC par la moitié de AB , ou 8 par 3 ; le produit 24 toises carrées est la valeur du triangle ABC.

Mais, si le plus grand côté AC ne contenoit que 9 toises, le carré de 9 donnant 81 , nombre plus petit que 100 qui est la somme des deux autres carrés, l'angle B seroit aigu ; & ce seroit un angle obtus, si AC valoit 11 toises, parce que le carré de $11 = 121$, nombre plus grand que 100 , somme

des quarrés faits sur les deux autres côtés (n°. 187.).

PROBLÈME LXXXI.

193. Trouver la surface d'un triangle isoscèle ABC (*fig. 35.*) acutangle ou obtusangle, dont on ne connoît que les trois côtés. On sçait que $AC = 4$ perches ; AB & BC en valent 3 chacun.

RÉSOLUTION.

Il est certain que , si l'on peut connoître la perpendiculaire BD abaissée de l'angle B sur le côté AC, la surface de ce triangle sera trouvée. Remarquez donc que cette perpendiculaire doit nécessairement tomber sur le milieu de AC (n°. 19.). Ainsi $AD = 2$ perches , & le triangle BDA est rectangle. Par conséquent le quarré de AB ou $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$ (n°. 187.). Ainsi $\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$: d'où l'on tire $BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$. La perpendiculaire BD est donc égale à la racine quarrée de 5 perches quarrées.

Pour avoir cette perpendiculaire très-approchée, réduisons les 5 perches quarrées en pouces quarrés ; elles produiront 233280 pouces quarrés, dont la racine quarrée est 482 pouces courans à peu près, valeur de la perpendiculaire BD.

Multipliez donc la moitié de la base AC, c'est-à-dire , 2 perches ou 432 pouces , par la perpendiculaire $BD = 482$ pouces : le produit 208224 pouces quarrés exprimera la surface du triangle isoscèle ABC ; & réduisant ce nombre de pouces quarrés en de plus grandes mesures , on trouvera que la surface du triangle ABC $= 4$ perches 4 toises 6 pieds quarrés.

L'aire du triangle ABC se trouvera un peu plus grande, si l'on fait usage de l'approximation des racines, enseignée n°. 79. Algèb. Tom. I. car, en se proposant d'avoir la racine quarrée de 5 perches quarrées plus approchée que de $\frac{1}{10000}$, on multipliera 5 par le quarré de 10000 = 100000000; & le divisant sur le champ par ce même quarré, le nombre 5 se trouvera transformé en la fraction $\frac{500000000}{1000000000}$, dont il faudra extraire la racine quarrée, tant du numérateur que du dénominateur. Or celle du dénominateur = 10000; (supp.) il n'y a donc qu'à extraire celle du numérateur: on la trouvera = 22360, sous laquelle posant celle du dénominateur 10000, on verra que la racine quarrée de 5 = $\frac{22360}{10000} = \frac{2236}{1000}$, racine si approchée qu'il ne lui manque pas $\frac{1}{10000}$ de perche.

Présentement, il faut multiplier la moitié de la base AC ou 2 perches par la perpendiculaire BD = $\frac{2236}{1000}$; & l'on aura $\frac{4472}{1000}$ pour l'aire du triangle proposé: cela fait 4 perches quarrées + $\frac{472}{1000}$ de perche quarrée. On multipliera cette fraction par 9, (parce qu'une perche quarrée = 9 toises quarrées) & cela produira $\frac{4248}{1000}$ de toise quarrée = 4 toises quarrées + $\frac{248}{1000}$ de toise quarrée: en multipliant le numérateur de cette dernière fraction par 36, pour avoir des pieds quarrés, on la trouvera = $\frac{8928}{1000}$ de pied quarré; lesquelles = 8 pieds quarrés + $\frac{928}{1000}$ de pied quarré. Si l'on continue de multiplier le numérateur de cette fraction par 144, pour avoir des pouces quarrés, elle deviendra = $\frac{1285632}{1000000}$ de pouce quarré = 133 pou-

40 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

ces quarrés $\div \frac{63}{1000}$ de pouce quarré, dont multipliant le numérateur par 144, pour avoir des lignes quarrées, on aura $\frac{21.008}{1000}$ de ligne quarrée \approx 91 lignes quarrées $\div \frac{8}{1000}$ ou $\frac{1}{12}$ de ligne quarrée. Tellement que l'aire du triangle proposé \approx 4 perches, 4 toises, 8 pieds, 133 pouces, 91 lignes $\div \frac{1}{12}$ de ligne quarrée ; & cette aire, qui devoit être la même que la précédente, est néanmoins plus grande, parce que la racine en est plus approchée.

On est entré dans tout le détail de ce calcul, afin que les Commençans aient des modèles sur lesquels ils puissent se régler.

PROBLÈME LXXXII.

194. Déterminer la surface du triangle scalène ABC (*fig. 36.*) obtusangle ou acutangle, par la seule connoissance de ses trois côtés, dont AC \approx 5 toises, BC en vaut 4, & BA \approx 2.

RÉSOLUTION.

Vous représenterez à peu près la figure de ce triangle sur un brouillon, où vous marquerez la valeur trouvée de chaque côté. Après cela vous abbaisseriez une perpendiculaire BD sur le plus grand côté AC, afin que cette perpendiculaire tombe toujours au dedans du triangle. Il est question de connoître cette perpendiculaire.

Pour y parvenir avec plus de facilité, soient AC $\approx a$, BC $\approx b$, AB $\approx c$, AD $\approx x$ inconnue, parce que l'on ignore à quelle distance du point A tombe la perpendiculaire BD ; ainsi DC (qui vaut AC \approx AD) sera $\approx a - x$. Ap-

pellons aussi la perpendiculaire inconnue $BD=y$; & remarquons que le triangle proposé se trouve résolu, par la perpendiculaire BD , en deux triangles rectangles BDA , BDC , dans lesquels les côtés BA & BC sont hypothénuses, chacun dans leur triangle. On a par conséquent, en considérant

d'abord le triangle rectangle ADB , $\overline{AB} = \overline{AD}$

+ \overline{BD} , c'est-à-dire, $c^2 = x^2 + y^2$. Passant ensuite au triangle rectangle BDC , on en tire

$\overline{BC} = \overline{DC} + \overline{BD}$, ou $b^2 = a - x \times a - x + y^2$; c'est-à-dire, (en faisant le calcul) que $b^2 = a^2 - 2ax + x^2 + y^2$. Si l'on substitue, dans cette dernière équation, c^2 en la place de $x^2 + y^2$, dont on a vu l'égalité, elle deviendra $b^2 = a^2 - 2ax + c^2$; donc (en transposant) $2ax = a^2 + c^2 - b^2$; & divisant l'un & l'autre membre par $2a$,

l'on trouve $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$; ce qui donne (en sub-

stituant les nombres) $x = \frac{25 + 4 - 16}{10} = \frac{13}{10} = AD$.

Si l'on reprend l'équation $c^2 = x^2 + y^2$, & que l'on mette les nombres trouvés en la place des lettres, on aura $4 = \frac{169}{100} + y^2$; & en transposant, on trouve $4 - \frac{169}{100} = y^2 = \frac{400}{100} - \frac{169}{100} = \frac{231}{100}$; donc (en extrayant la racine quarrée de part & d'autre) y ou $BD = \sqrt{\frac{231}{100}}$. Ce qui signifie que la perpendiculaire BD = la racine quarrée de 231 toises quarrées divisées par 100; & réduisant les 231 toises quarrées en pouces quarrés, vous trouverez $BD = \sqrt{\frac{1127504}{100}} = \frac{10624}{100}$ de pouces courans à peu près.

42 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

Dans le triangle ABC on connoît donc la base $CA = 5$ toises ou 360 pouces, & la perpendiculaire $BD = \frac{1024}{10}$ de pouces. Par conséquent on en aura la surface, en multipliant la moitié de la base $= 180$ par $\frac{1024}{10}$, qui est l'expression en pouces de la perpendiculaire BD : le produit sera 19692 pouces quarrés, lesquels réduits en toises, valent 3 toises 28 pieds 108 pouces quarrés.

On trouvera que le calcul sera beaucoup plus simple, plus expéditif, & plus juste, en faisant usage de l'approximation des racines, dont on a vu l'art au chapitre de l'Algèbre (n°. 79.). Sans réduire les $\frac{231}{100}$ de toise quarrée en pouces quarrés ou en lignes, &c. si on en veut avoir la racine quarrée plus approchée que de $\frac{1}{10000}$, on observera d'abord que la racine quarrée du dénominateur 100 est 10, & qu'ainsi l'approximation ne peut regarder que le numérateur 231, qui n'est pas un nombre quarré. On le multipliera donc par le quarré de 10000, comme on l'a enseigné à l'article de l'approximation des racines; ce qui produira 23100000000; & le divisant sur le champ par la même quantité qui l'a multiplié, le numérateur 231 se trouvera sous la forme de la fraction $\frac{23100000000}{10000000000}$, dont on sçait que l'on a la racine quarrée, en extrayant celle du numérateur & celle du dénominateur : or celle du dénominateur est tirée, c'est 10000 (supp.); il ne reste donc qu'à extraire, par la règle ordinaire, la racine quarrée du numérateur 23100000000, que l'on trouvera $= 151986$; & posant dessous celle de son dénominateur, on verra que la racine quarrée de 231 $= \frac{151986}{10000}$ de toise courante; racine si approchée qu'en l'augmentant seulement de $\frac{1}{10000}$, elle seroit trop grande : or $\frac{1}{10000}$ de toise est presque inaffignable, cela n'excède guère

un point, puisqu'on ne trouve que 10368 points dans la longueur d'une toise; par conséquent la précision rigoureuse, si elle étoit possible ici produiroit à peine une différence discernable. Supposant donc que nous avons la racine exacte du numérateur 231; on la divisera par 10, qui est celle de son dénominateur 100, & l'on verra que la perpendiculaire BD, que l'on a trouvée = $\sqrt{\frac{231}{100}}$, vaut aussi $\frac{151,86}{100000}$ de toise courante.

Pour avoir la valeur du triangle ABC, on multipliera donc sa base CA = 5 toises par la moitié de cette perpendiculaire BD; cela produira $\frac{1,79965}{100000}$ de toise quarrée, lesquelles valent 3 toises quarrées + $\frac{79965}{10000}$. On sçait qu'une toise quarrée = 36 pieds quarrés; en multipliant donc le numérateur 79965 de la fraction précédente par 36, on aura $\frac{28,78740}{100000}$ de pied quarré, qui valent 28 pieds quarrés + $\frac{78740}{100000}$ de pied quarré; laquelle fraction multipliée par 144 (parce qu'un pied quarré = 144 pouces quarrés) produira $\frac{113,38560}{100000}$ de pouce quarré: c'est 113 pouces quarrés + $\frac{38560}{100000}$ de pouce quarré. Si on multiplie encore cette dernière fraction par 144, elle donnera $\frac{55,52640}{100000}$ de ligne quarrée, lesquelles valent 55 lignes quarrées + $\frac{52640}{100000}$: laquelle fraction, réduite à sa plus simple expression = $\frac{3,2}{6,25}$ de ligne quarrée; de sorte que l'aire du triangle ABC = 3 toises, 28 pieds, 113

44 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

pouces , 55 lignes quarrées $\rightarrow \frac{3}{2} \frac{1}{2}$ de ligne quarrée (a).

Il ne faut pas être surpris que cette aire se trouve plus grande que celle de la méthode précédente, qui n'a donné que 3 toises 18 pieds & 108 pouces quarrés quoiqu'elle dût être la même. C'est que dans l'extraction des racines , on néglige beaucoup moins en approchant par des dix millièmes de toises que par des pouces.

Comme ces institutions peuvent être utiles à ceux qui ont déjà quelque connoissance en Géométrie , nous avons choisi ce dernier cas qui n'est pas des plus simples , afin qu'ils apprennent à se démêler des calculs un peu compliqués. Cependant nous allons résumer dans une règle générale tous les procédés que nous avons tenus.

(a) Je conseille fort que l'on n'emploie jamais d'autre méthode d'approximation que cette dernière ; elle paroît longue dans l'explication , parce qu'il faut tout dire aux Commencans ; mais elle est fort courte dans la pratique. Ses avantages ont été exposés à la fin du n°. 79. de l'Algeb. Tom. I. On peut le relire , on y verra qu'on peut se dispenser d'écrire plus d'une fois le dénominateur 100000 , que l'on a répété ici autant de fois que doit le supposer une personne instruite , mais dont la suppression auroit peut-être embarrassé celles qui ne le font pas ou qui ne le font pas assez. C'est dans ce même esprit , que je leur dirai encore , que le point mis dans quelques-unes des fractions supérieures , en distingue les entiers , qui sont à la gauche , des parties fractionnées qui sont à la droite ; ce qui procure une commodité dans la division , laquelle n'est point du tout à négliger ; puisque ce point seul , placé convenablement , donne tout-à-coup & les entiers & la fraction de la division qui se présente , ainsi qu'il est expliqué au même n°. 79. de l'Algeb. Tom. I.



RÈGLE GÉNÉRALE

Pour le calcul des triangles scalènes, acutangles ou obtusangles, dont on cherche la surface, lorsque l'on n'en connoît que les trois côtés.

195. Prenez l'équation $DC = \frac{\overline{CA} + \overline{BC} - \overline{AB}}{2 CA}$,

qui est l'expression du plus grand segment; cette équation vous montre qu'afin d'avoir la valeur du grand segment DC, il faut retrancher le carré du plus petit côté AB, de la somme des carrés des deux plus grands côtés CA, BC, & diviser ce reste par le double du plus grand côté CA.

La valeur de DC une fois connue, la perpendiculaire BD est aisée à connoître: car on sçait (n°. 187.)

que $\overline{BC} = \overline{DC} + \overline{BD}$. D'où l'on tire $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC}$, ou $BD = \sqrt{\overline{BC} - \overline{DC}}$. C'est-à-dire, que la perpendiculaire DB se détermine, en tirant la racine carrée de la différence qu'il y a entre le carré de BC, & le carré du grand segment DC (a).

(a) La Démonstration de la Proposition dix-huit, & la Résolution des Problèmes soixante-dix-huit & soixante-dix-neuf, pourroient embarrasser un peu les jeunes gens, à cause que le détail en est assez long; mais avant qu'ils y arrivent, ils auront déjà acquis quelque habitude à l'application. A propos de cela j'avertirai que l'on ne sçauroit trop exercer les Commencans au calcul; la Géométrie en fait un usage si continuel, qu'il n'est pas possible de faire quelques progrès dans cette science sans son secours, sur-tout lorsqu'on la met sous la forme d'une équation, comme je l'ai dit ailleurs.

PROBLÈME LXXXIII.

196. Déterminer la longueur que l'on doit donner aux échelles, afin qu'elles soient proportionnées aux murailles que l'on se propose d'escalader (*fig. 37.*).

R É S O L U T I O N.

Supposons que la hauteur de la muraille soit représentée par la ligne $AB = 6$ toises, & que $BC = 2$ toises, soit la distance du pied de l'échelle à la muraille (on pose les échelles en taluant, de peur qu'elles ne se renversent.).

L'échelle AC représente alors l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont on connoît les deux côtés AB , BC . Or le quarré de l'hypothénuse AC vaut la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés AB , BC (n^o. 187.). On aura

$$\text{donc } \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 36 + 4 = 40$$

toises quarrées; ainsi $AC = \sqrt{40}$. Réduisez donc les 40 toises quarrées en pouces ou même en lignes quarrées; cette réduction produira 29859840 lignes quarrées, dont la racine quarrée est 5464 lignes courantes $= 6$ toises 1 pied 11 pouces 4 lignes, valeur de l'hypothénuse AC si approchée, qu'il ne lui manque pas la longueur d'une ligne.

PROBLÈME LXXXIV.

197. Trouver la surface du terrain irrégulier $ABCDE$, dont on ne peut connoître que le circuit ou le contour (*fig. 38.*).

PREMIER MOYEN.

Renfermez cette figure dans un rectangle $OSPL$, en abaissant des angles E, C , les plus saillans, les perpendiculaires EO, CS , sur le côté AB prolongé de part & d'autre, autant qu'il en fera besoin; & prolongeant ces perpendiculaires jusqu'aux points L, P , tels que de l'angle D on puisse abaisser une troisième perpendiculaire LDP sur les deux premières, on mesurera le rectangle $OSPL$, & les quatre triangles rectangles EOA, CBS, CDP, DEL , dont on fera une somme, on retranchera la somme de ces triangles de la surface du rectangle $OSPL$: il est évident que le reste donnera la surface de la figure irrégulière $ABCDE$.

Remarquez que par ce moyen il n'est pas besoin de connoître les angles, ni même les côtés qui terminent la pièce de terre $ABCDE$; mais, comme il n'est pas toujours possible de s'étendre autour du terrain que l'on veut mesurer, il est quelquefois nécessaire de connoître la longueur de ses côtés, & la grandeur de ses angles.

SECOND MOYEN.

198. Mesurez les côtés & les angles du terrain $ABCDE$ (*fig. 39.*). Ecrivez toutes ces mesures, ou plutôt faites un brouillon qui représente à peu près les côtés & les angles du terrain proposé, comme vous le voyez dans la figure 39, où l'on a écrit le long de chaque côté au dehors le nombre de toises qu'il contient, & au dedans les degrés de chaque angle.

Vous choisirez ensuite un terrain dans la campagne, où vous puissiez faire une figure 40 tout-à-fait égale à la figure 39: c'est-à-dire, que vous ferez

48 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

$MN = AB = 4$ toises; l'angle $N = A$; le côté $NO = AE = 5$ toises; l'angle $O = E$; le côté $OP = DE = 2$ toises; l'angle $P = D$; le côté $PT = DC = 6$ toises; l'angle $T = C$; ce qui donnera l'angle M égal à l'angle B : ainsi la figure $MNOPT$ sera égale en tout au terrain $ABCDE$, puisque tous les côtés & tous les angles de l'un sont égaux à tous les côtés & à tous les angles de l'autre, chacun à chacun; par conséquent, en mesurant le terrain $MNOPT$, au dedans duquel il est libre d'opérer (Probl. 76. n°. 182.), on aura la mesure du terrain $ABCDE$, dont l'intérieur n'est pas accessible.

Le Problème 82 (n°. 194.), que nous avons résolu par la propriété du triangle rectangle, pourroit tirer sa résolution du moyen que nous venons d'exposer; mais la voie seroit plus longue.

TROISIÈME MOYEN.

199. On lèvera le plan du terrain $ABCDE$ (fig. 39.), c'est à dire, que l'on fera en petit une figure $abcde$ (fig. 41.) semblable à la grande figure que l'on se propose de mesurer. Or voici comment cela s'exécute. Vous tracerez au bas d'un carton bien uni une ligne MN , que vous diviserez en autant de parties égales que vous en aurez besoin (n°. 63.); par exemple, en 15: cette ligne ainsi divisée s'appelle une *échelle*. Vous allez en voir l'usage.

Tirez sur votre papier une ligne ab (fig. 41.) qui contienne quatre parties égales de l'échelle, pour représenter $AB = 4$ toises. Faites l'angle $bac =$ l'angle BAE pris sur le terrain, (car je suppose que l'on a mesuré les côtés & les angles du terrain $ABCDE$) & portez cinq parties de

de votre échelle depuis a jusqu'en e ; le petit côté ae représentera le grand côté $AE = 5$ toises. Faites ensuite au point e l'angle aed égal à l'angle AED ; prenez deux parties de votre échelle, portez-les de e en d : la ligne ed représentera $ED = 2$ toises. Continuez à faire au point d un angle $edc =$ l'angle EDC du terrain, & donnez six parties de votre échelle au petit côté dc , pour représenter les six toises du grand côté DC , & tirez cb qui ferme la figure $abcde$: elle sera en petit ce que la figure $ABCDE$ est en grand ; la grande figure pourra donc être connue par la petite : c'est pourquoi si de l'angle a on tire les lignes ad , ac , elles diviseront la petite figure en trois triangles, dont on cherchera l'aire séparément, en abaissant les perpendiculaires er , as , bx , sur les bases de ces triangles. On portera ces bases & ces perpendiculaires sur l'échelle MN , pour voir combien elles en contiennent de parties. On évaluera ces triangles à l'ordinaire, & leur somme représentera la surface du terrain $ABCDE$.

DÉMONSTRATION.

Puisque chaque partie de l'échelle MN est prise pour une toise, le carré de cette partie représentera une toise carrée ; mais (conf.) les lignes de la petite figure contiennent autant de parties de l'échelle que les lignes correspondantes de la grande contiennent de toises. Il y aura donc autant de toises carrées dans le contenu du terrain $ABCDE$, qu'il y a de petits carrés dans la surface du petit plan $abcde$; & par conséquent ce petit plan est fort propre à faire connoître la surface du terrain dont il est le modèle (a).

(a) Cette Démonstration est plutôt une Démonstration de sentiment qu'une Démonstration en forme. J'en conviens : cependant il

La multitude d'opérations que l'on est obligé de faire en prenant la longueur des côtés & la grandeur des angles d'un terrain dont on veut avoir le plan, expose à beaucoup d'erreurs ; on en diminueroit le nombre, si l'on pouvoit se passer de connoître la valeur des angles.

QUATRIEME MOYEN,

D'évaluer la surface d'un terrain inaccessible au-dedans, sans qu'il soit nécessaire de connoître les angles qui la terminent.

Quand cette figure est un triangle, c'est la chose du monde la plus aisée. Mesurez les trois côtés AB , BC , CA , qui enveloppent votre terrain (*fig. 42.*). Pour le rapporter sur le papier, ayez recours à l'échelle MN . Prenez donc sur cette échelle six parties, que vous donnerez à la petite ligne ab , (*fig. 43.*) qui représentera ainsi les six perches du côté AB . De l'extrémité a , avec sept parties de l'échelle, décrivez un arc ; & de l'extrémité b avec quatre parties de l'échelle, décrivez un autre arc qui coupe le premier en c : il est évident que le petit triangle abc fera un modèle parfait du grand triangle ABC . Car si le grand côté $AC = 7$ perches, le petit côté ac contient aussi sept parties égales ; & les quatre parties du petit côté bc

m'a paru qu'on n'en devoit pas absolument condamner l'usage, surtout à l'égard des vérités que l'on sait être démontrées par d'autres voies plus rigoureuses. Cette méthode soutient & anime le goût des Commencans, qui ont une prodigieuse envie d'aller en avant ; d'ailleurs, si l'on considère bien cette manière, elle est plus de génie que de calcul ; elle est par conséquent moins fatigante, ce qui mérite quelques égards.

Ceux qui ne se contenteront pas de ce que nous disons ici, n'auront qu'à consulter le Chapitre des lignes proportionnelles ; ils y seront pleinement satisfaits. Notre dessein a été de faire voir qu'indépendamment de la rigueur géométrique, l'on pouvoit faire concevoir la manière de lever les plans, & d'en déterminer l'aire ou la surface.

MESURE DES TERREINS. 41

répondent aux quatre perches du grand côté BC ; par conséquent en mesurant la surface du petit triangle abc , on aura celle du grand triangle ABC (n°. 197.).

Si le terrain proposé n'a pas une figure triangulaire , comme la figure 44 , on pourra néanmoins le représenter sur le papier avec la même précision que nous y avons représenté le triangle , sans avoir égard à la grandeur de ses angles.

On en tiendra d'abord les côtés , auxquels je suppose les dimensions marquées dans la figure 44 ; & pour en avoir les angles sans les prendre avec un instrument , par exemple , pour déterminer l'angle ABC , on prolongera le côté AB autant qu'il en sera besoin , jusqu'en M , & l'on pourra prendre sur le côté BC la partie $BT = BM = 4$ toises ; on tiendra aussi $MT = 7$ toises.

Toutes ces dimensions étant écrites , on se disposera à représenter sur le papier le terrain $ABCD$, en faisant usage de l'échelle MN . Ainsi on tracera la ligne ab (fig. 45.) , à laquelle on donnera dix parties de l'échelle , afin de représenter les dix toises du côté AB ; & faisant le prolongement $bm = 4$ parties de l'échelle , pour répondre aux quatre toises du grand prolongement BM , on construira , comme ci-dessus , le petit triangle bmt , dont les côtés auront entre eux les mêmes dimensions que ceux du grand triangle BMT , c'est-à-dire , que mt aura sept parties de l'échelle , & bt en aura quatre ; ce qui donnera l'angle $abc =$ l'angle ABC . Après quoi on fera $bc = 8$ parties de l'échelle : cette ligne représentera les huit toises du côté BC . Enfin l'on déterminera l'angle BCD par le même moyen qui vient de nous donner la grandeur de l'angle ABC , & ainsi des autres ; la figure 45 représentera donc en petit la longueur

52 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

des côtés, & la grandeur des angles du terrain $ABCD$; par conséquent la mesure de la petite figure 45 fera connoître la surface du terrain $ABCD$ (n°. 197.).

PROBLÈME LXXXV.

200. Lever le plan d'un terrain $ABCDE$, dont on peut parcourir l'intérieur (fig. 46.).

RESOLUTION.

Mesurez le contour du terrain $ABCDE$, & les lignes EB , EC , qui le partagent en triangles, dont chaque côté contient le nombre de perches marqué sur la figure; il n'est pas besoin d'en mesurer les angles; Servez-vous donc d'une échelle MN , qui contienne au moins autant de parties égales, que le plus grand côté $BC = 5$ contient de perches.

Il faut à présent procéder à construire une petite figure $abcde$ (fig. 47.), qui représente en petit tout ce que le terrain $ABCDE$ possède en grand. Tracez ae sur un carton bien uni, à laquelle vous donnerez trois parties de l'échelle, pour répondre aux trois perches du grand côté AE ; des points a , e , avec deux parties de l'échelle, décrivez deux arcs qui se coupent au point b ; tirez la ligne ab , & ponctuez eb ligne de construction: les deux petites lignes ab , be représentent les deux grands côtés AB , BE , qui ont chacun deux perches: en sorte que le petit triangle $b a e$ contient dans sa petite étendue tout ce qui est en grand dans le triangle BAE : réduisons donc, en suivant la même méthode, le triangle BEC au petit triangle $b e c$, en prenant cinq parties de l'échelle, avec lesquelles du point b nous décrirons un arc; après

quoï, avec quatre parties de la même échelle, du point *e* nous en tracerons un autre qui coupera le premier en un point *c*, où tirant *bc*, on ponctuera *cc*. Pour achever la figure *abcde*, qui est un modèle parfait du terrain ABCDE, du point *c*, avec deux parties de l'échelle, vous décrirez un arc qui se trouvera coupé au point *d* par un autre arc décrit du point *e* avec trois parties de l'échelle : vous tracerez *ed*, *cd*, & vous aurez un plan très-exact du terrain ABCDE ; puisque les dimensions de la petite figure *abcde* sont exactement correspondantes aux dimensions du terrain ABCDE.

PROBLÈME LXXXVI.

201. Trouver la surface d'un polygone régulier ABDEFGHL, par exemple, d'un bassin octogone rempli d'eau, sans entrer au-dedans de ce polygone (*fig. 48.*).

RÉSOLUTION.

Il est clair que le Problème se réduit à trouver la surface du triangle ACB ; puisque ce polygone étant composé de 8 triangles égaux, en multipliant par huit la surface de l'un de ces triangles, le produit donnera la surface totale de ce polygone.

Rappelez-vous que le côté AB d'un polygone régulier est coupé en deux parties égales par la perpendiculaire CO abaissée du centre C (n°. 122.) ; que l'angle ABD d'un tel polygone est aussi coupé en deux parties égales par une ligne CB tirée du centre au sommet de cet angle ; & que l'on détermine la valeur de cet angle, en retranchant l'angle ACB au centre de 180 degrés (n°. 121.). Or l'angle au centre de l'octogone régulier = 45

14 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

degrés, huitième partie de 360. Retranchant donc 45 de 180, on a 135 pour l'angle ABD de l'octogone, dont la moitié $= 67\frac{1}{2}$ est la valeur de l'angle CBO. On peut mesurer BO, moitié du côté BA.

Cela supposé, construisez sur un terrain le plus uni que vous pourrez trouver, un triangle RPS (*fig. 49.*) égal au triangle CBO, en faisant RP = OB; l'angle SRP égal à l'angle droit COB, & l'angle SPR = $67\text{ degrés } \frac{1}{2}$ = l'angle CBO; le point S, où les deux lignes RS, PS se rencontreront, déterminera le triangle RSP entièrement égal au triangle CBO (n°. 85.); mesurez donc le triangle SRP, c'est-à-dire, multipliez la base RP par la perpendiculaire SR, vous aurez un produit double du triangle SRP, ou de CBO = SRP; or le triangle ACB est double du triangle CBO; le produit de RP par RS exprimera donc la valeur du triangle ACB; & ce produit multiplié par 8 donnera la surface totale de l'octogone régulier.

En levant le plan de ce polygone, on pourroit encore en trouver l'aire ou la surface, ainsi que nous l'avons enseigné (n°. 197.).

Les bassins sont quelquefois d'une figure circulaire. La base ou le plan sur lequel pose une colonne est un cercle : il faut donc sçavoir trouver l'aire d'un cercle, afin qu'il n'y ait aucun cas qui puisse arrêter.

PROBLÈME LXXXVII.

202. Trouver la surface d'un cercle, au-dedans duquel il est libre de s'étendre (*fig. 51.*).

RÉSOLUTION.

On plantera des piquets fort proches les uns des

autres sur la circonférence du terrain circulaire. On y appliquera une mesure pliante, une chaîne ou un cordeau, autant de fois qu'il en sera besoin; on mesurera aussi le rayon OS; on multipliera les toises que contient la circonférence par les toises du rayon: la moitié de ce produit donnera la surface du cercle.

Il s'agit de prouver que l'aire du cercle est égale à la moitié du produit de la circonférence SS par le rayon OS.

Tirez tout autour du centre O les rayons OS fort près les uns des autres (*fig. 51.*), afin que la surface circulaire soit divisée en un très-grand nombre de petits triangles SOS, qui ont pour hauteur le rayon OS, & pour base les petits arcs SS, qui ne s'écartent pas sensiblement de la ligne droite, à cause de l'énorme petitesse dont on peut prendre ces arcs; mais pour évaluer chaque petit triangle SOS, on prendroit la moitié du produit de la base SS par le rayon OS; par conséquent afin d'avoir la surface de tous ces triangles, on prendroit tous les arcs SSS, c'est-à-dire, toute la circonférence, que l'on multiplieroit par le rayon, pour avoir dans la moitié de ce produit la surface de tous ces triangles réunis, ou, ce qui est la même chose, l'aire du cercle entier, qui est composé de ces triangles; C. Q. F. D. (a).

Si l'on ne peut pas s'étendre sur la surface du cercle, que l'on soit obligé de trouver l'aire d'un bassin circulaire plein d'eau, on aura recours à un moyen très-élégant, dont les Géomètres sont rede-

(a) Nous avouons que cette Démonstration pourroit être plus exacte. Mais il ne nous a pas paru possible de la rendre telle pour des enfans à qui ce premier Livre est principalement destiné. Quand on aura vu ce que nous dirons dans la suite de la méthode d'exhaustion, il sera facile de l'appliquer à cette Démonstration pour la rendre rigoureuse.

56 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

vables au célèbre Archimède, si profond dans les Mathématiques. Ce rare génie, qui a découvert tout ce qu'il y a de plus difficile dans la Géométrie utile, a trouvé qu'un cercle ayant sept pieds de diamètre, avoit à peu près vingt-deux pieds de circonférence. Nous ne sçaurions faire entrer les Commençans dans les recherches qui ont conduit cet homme extraordinaire à cette découverte; qu'il leur fuffise d'en apprendre l'usage, jusqu'à ce qu'ils aient la force d'en connoître l'esprit.

PROBLÈME LXXXVIII.

203. Trouver la surface d'un cercle, dont on sçait que la circonférence contient dix pieds (*fig. 50.*).

R É S O L U T I O N.

On a besoin du rayon, ou de la moitié du diamètre SD : supposant la découverte d'Archimède, nous ferons cette règle de trois: *22 est à 7, comme 10 est à SD* , diamètre cherché; d'où l'on déduit $SD = \frac{70}{22}$ de pied, dont la moitié $= \frac{35}{11} = CS$, rayon dont on cherchoit la valeur: multiplions donc 5 pieds, moitié de la circonférence, par $\frac{35}{11}$ de pied valeur du rayon; le produit $\frac{175}{11}$ de pied carré exprime l'aire du cercle, dont la circonférence $= 10$ pieds; & si l'on achève ce calcul, on trouvera que $\frac{175}{11}$ de pied carré $= 7$ pieds, 137 pouces, 65 $+$ $\frac{1}{11}$ de ligne carrée.

Par le diamètre connu on pourroit aussi déterminer la circonférence, comme vous allez voir.

PROBLÈME LXXXIX.

204. Evaluer la surface d'un cercle dont le diamètre $SD = \frac{11}{11}$ de pied (*fig. 50.*).

RÉSOLUTION.

Faites cette règle de trois : 7 est à 22 , comme $\frac{11}{7}$ est à la circonférence que l'on cherche $= 10$ pieds : car multipliant $\frac{11}{7}$ par 22 $= \frac{77}{7}$; & divisant ce produit par 7 , on trouve 10 pour la circonférence. Le diamètre & la circonférence d'un cercle étant connus , sa surface est aisée à connoître (n^o. 202.).

REMARQUE.

Lorsqu'on cherche la circonférence , on observera que la règle de trois doit commencer par 7 : si c'est le diamètre , elle commencera par 22.

PROBLÈME XC.

205. Trouver la surface d'un *Secteur de cercle* BAC (fig. 52.),

RÉSOLUTION.

Un *Secteur de cercle* est la portion d'une surface circulaire renfermée entre deux rayons AB , AC , & l'arc BC qui la termine. Vous trouverez l'aire de ce secteur , en enveloppant l'arc BC d'une mesure pliante qui indiquera les toises , les pieds , &c. , contenus dans cet arc ; on toisera aussi le rayon ; on multipliera le rayon par l'arc , & la moitié du produit déterminera l'aire du secteur BAC. Cela est clair par la Démonstration du n^o. 202.

Si vous ne pouvez connoître que l'arc BC de ce secteur , sans pouvoir mesurer son rayon , employez le moyen suivant , qui est totalement indépendant de la découverte d'Archimède.

PROBLÈME XCI.

206. Moyen mécanique & Géométrique de trouver le rayon d'un cercle ou d'un secteur, en supposant simplement qu'on puisse appliquer quelque mesure sur une portion de la circonférence ou du secteur (*fig. 53.*).

EXPOSITION DE CE MOYEN.

Prenez une lame flexible (*a*), dont la matière retienne facilement la forme que l'on a dessein de lui faire prendre, par exemple une lame de plomb ou de cire qui soit de bonne consistance : appliquez cette lame sur la portion de circonférence *BC*, afin qu'elle prenne la forme circulaire de cet arc ; enlevez cette lame ainsi conformée ; placez-la sur un terrain libre & bien uni, où vous tracerez un sillon le long de son contour *BOC*. Ce sillon représentera une portion de circonférence égale à l'arc *BC*. Cherchez le centre de cet arc (n°. 130.) ; vous aurez le rayon *AB*, avec lequel vous décrirez une circonférence entière que vous mesurerez, ainsi que nous l'avons enseigné : la circonférence & le rayon connus, il ne s'agit plus que de calculer pour avoir la surface du cercle ou du secteur ; ce qui est fort aisé (n°. 202 & 205.).

Si l'on ne connoît que le rayon ou le diamètre du cercle que l'on veut mesurer, avec ce rayon ou ce demi-diamètre connu, on tracera une circonférence sur un terrain qui permette que l'on applique une mesure à cette circonférence ; on en aura par ce moyen la longueur en toises, pieds, &c., & par conséquent l'aire du cercle proposé.

(*a*) Il ne seroit pas absolument nécessaire d'avoir une lame ; il suffiroit d'avoir la disposition de trois points, parce qu'en imaginant une circonférence par ces trois points, on en trouveroit facilement le centre, & par conséquent le rayon.

Quoique l'on puisse évaluer la surface d'un secteur par la mesure de l'arc qui le termine, parce que l'arc fait connoître le rayon ; la seule connoissance du rayon ne pourroit pas servir réciproquement à déterminer l'aire d'un secteur, puisque le même rayon peut convenir à une infinité de secteurs.

PROBLÈME XCII.

207. Trouver la surface d'un *segment de cercle* BCAB. On appelle *segment* une portion de cercle renfermée entre une corde BC & l'arc BAC soutenu par cette corde (*fig. 54.*).

RÉSOLUTION.

On suppose d'abord que l'on puisse opérer au-dedans de la figure. Cherchez le centre O du cercle auquel ce segment appartient (n°. 130.) ; vous aurez le secteur BOCAB, dont le segment proposé fait partie. Déterminez l'aire de ce secteur (n°. 205.), & celle du triangle BOC (n°. 176.) ; ôtez le triangle du secteur : le reste sera la valeur du segment BCAB, Cela n'a pas besoin de démonstration.

Pour connoître la surface de ce segment, quand on ne pourra mesurer que l'arc BAC qui le termine, on se servira du moyen que nous avons indiqué (n°. 206.).

OBSERVATION SUR LA MESURE
des Surfaces.

208. Il faut prévenir une objection qui est toute naturelle. Nous avons mesuré les surfaces, comme si c'étoient des plans parfaits ; cependant la plupart des terrains sont rompus, inégaux, raboteux : on y trouve des creux, des côteaux, des monticules, des monts. Un dôme, une demi-

sphère ont très-certainement plus de surface que la terre platte ou la base plane, sur laquelle ils s'appuient ; l'art de l'Arpentage donne par conséquent aux terrains beaucoup moins de surface qu'ils n'en possèdent ; n'est-ce pas une injustice , & ne fait-on pas un tort réel aux Propriétaires ?

Il y a des cas où ces inégalités doivent être considérées , & d'autres où l'on ne doit y avoir aucun égard. Une Ville située sur une colline, dont elle occuperoit toute la pente ou simplement une partie, auroit besoin d'un plus grand nombre de pierres pour être pavée, que si elle étoit assise sur le plan horizontal qui lui sert de base, parce que l'on fait suivre au pavé la disposition du terrain : on toiserait en ce cas la surface courbe de la colline ; mais si l'on considéroit cette Ville par rapport aux maisons, aux édifices, aux jardins, aux vergers, aux plantations qu'elle renferme, ou que l'on peut y construire, sa mesure devroit s'estimer par celle de sa base horizontale, quand même cette base auroit une étendue incomparablement plus petite que la surface convexe de la colline.

La raison en est que les édifices, les arbres, les plantes s'élèvent sur leur terrain perpendiculairement à l'horison (a) : on doit donc évaluer alors la

(a) Polybe a fait cette observation, c'est au Chap. IV du Liv. IX, qui se trouve dans le sixième Tome de son Histoire, traduite par Dom Thuillier, & commentée par M. le Chevalier de Folard. Il s'agit dans ce Chapitre des connoissances nécessaires à un Général d'Armée. Entre plusieurs de ces connoissances, que Polybe détaille, dont les unes se peuvent acquérir par l'usage, par l'expérience, par l'Histoire, il en est quelques autres, où l'on a besoin d'étude & d'observations, comme par exemple, celles qui se tirent de l'Astronomie & de la Géométrie. Ce n'est pas qu'il importe beaucoup de posséder en entier l'objet de ces deux sciences ; mais il est très-important d'en savoir faire quelqu'usage ; ce qu'elles apprennent de plus nécessaire, c'est la durée des jours & des nuits : car il n'y a pas seulement de la différence entre la longueur du jour & celle de la nuit ; il y en a encore entre un jour & un jour, entre une nuit & une autre nuit ; il faut nécessairement savoir ce qui les fait croître & diminuer. Sans la connoissance de ces changemens, quel moyen de prendre de justes mesures pour une marche de nuit ou de jour ? Comment arriver à temps où l'on se propose

surface de la colline sur l'étendue que les édifices ou les plantes peuvent occuper verticalement. Or

d'aller ? On arrivera trop tôt ou trop tard. Polybe indique le moyen de s'en instruire ; il fait voir les fautes où sont tombés plusieurs Généraux qui les ignoroient. J'ajouterai aux connoissances tirées de l'Astronomie, celles que l'on tire des différens signes qui paroissent en l'air ; il n'y a presque point de changement de tems un peu remarquable qui n'ait quelque signe précurseur. On doit s'y rendre attentif. Cela peut être utile en bien des rencontres ; une pluie, un orage, un vent imprévu peut déranger extrêmement l'ordre ou l'exécution d'un projet, tandis que cette disposition de tems accommodera fort les affaires de celui qui l'aura pressentie.

Tout le monde connoît la nécessité de la Géométrie pour la Fortification, pour sçavoir lever un Plan avec quelque intelligence ; mais cette science est encore indispensable pour changer selon les occurrences la figure du Camp. Par ce moyen on pourra, en prenant quelque figure que ce soit, garder la même proportion entre le Camp, & ce qui doit y être contenu : ou, en gardant la même figure, augmenter ou diminuer l'aire du Camp, eu égard toujours à ceux qui y entrent ou qui en sortent, comme nous avons fait voir dans notre Traité des ordres de Batailles : & je ne crois pas (ajoute ce grand Historien) qu'on me sçache mauvais gré de demander à un Général quelque connoissance de l'Astronomie & de la Géométrie ; ajouter des connoissances inutiles au genre de vie que nous professons, uniquement pour faire montre & pour parler, c'est une curiosité que je ne sçaurois approuver ; mais je ne puis non plus goûter, que dans les choses nécessaires on s'en tienne à l'usage & à la pratique ; je conseille fort de remonter plus haut. Il est absurde que ceux qui s'appliquent à la danse & aux instrumens, souffrent qu'on les instruisse de la cadence & de la Musique, qu'ils s'exercent même à la lutte, parce que cet exercice passe pour contribuer à la perfection des deux autres ; & que des gens qui aspirent au commandement des Armées, trouvent mauvais qu'on leur inspire quelque teinture des autres Arts & des autres Sciences. De simples Artistes s'en tiennent donc plus appliqués & plus vifs à se surpasser les uns les autres, que ceux qui se proposent de briller dans la plus belle & la plus auguste des dignités ? Il n'y a personne de bon sens qui ne connoisse combien cela est peu raisonnable.

La plupart des hommes jugeant de la grandeur d'une Ville ou d'un Camp par la circonférence, regardent comme une chose incroyable, que, quoique Mégapolis ait de tour cinquante stades, & que Lacédémone n'en ait que quarante-huit, cette dernière Ville soit cependant une fois plus grande que l'autre. Que si, pour augmenter la difficulté, on leur dit qu'il peut se faire qu'une Ville ou un Camp de quarante stades de tour soit une fois plus grand qu'un autre de cent stades, c'est pour eux un paradoxe. La cause de cela est qu'on ne se souvient plus de ce que l'on a appris de Géométrie pendant sa jeunesse.

Il y en a qui sont dans une autre erreur ; ils prétendent que les Villes d'un terrain rompu & inégal, ont plus de maisons que celles qui sont bâties dans un terrain plat & uni. Il n'en est pourtant pas ainsi. Polybe en donne la Démonstration que nous avons rapportée ; puis il continue : Soit dit en passant en faveur de ceux qui, quoique neufs & ignorans sur cette matière, veulent cependant commander les Armées & avoir

cette étendue est égale à la base horizontale de la colline. En voulez-vous une démonstration bien

la conduite des affaires. J'ai cru devoir mettre ici ce long passage pour faire connoître la manière de Polybe, & le mérite de la Traduction de Dom Vincent Thuillier.

Je prens cette occasion de payer le tribut d'éloge si légitimement dû aux deux illustres Auteurs modernes qui ont travaillé sur Polybe ; je veux parler de Dom Vincent Thuillier, Bénédictin de la Congrégation de Saint Maur, & de M. de Folard, Chevalier de l'Ordre Militaire de S. Louis, Maître de Camp d'Infanterie. Le premier a traduit Polybe, & le second l'a commenté.

La Traduction de Dom Vincent Thuillier est très-belle ; le Polybe Grec n'a rien perdu de sa réputation dans le Polybe François. Il sembleroit difficile de soutenir mieux la dignité de son sujet. Si Dom Vincent Thuillier n'a pas suivi quelque tems le parti des armées, il faut qu'il soit doué d'une très-grande pénétration, pour avoir rendu d'une manière si claire & si précise une Histoire, où il n'est guères question que de faits militaires.

Mais le Commentaire du célèbre M. de Folard me paroît unique ; les grandes parties de la guerre y sont développées & démontrées presque aussi rigoureusement que les propositions de Géométrie : la discipline militaire, les évolutions, les armes, les marches, les campemens, les surprises, les batailles, le passage des grandes rivières, la guerre offensive, la défensive, la guerre des montagnes, l'attaque & la défense des Places, la sûreté des convois, des espions, tout y est traité en Philosophe, c'est-à-dire ; en remontant aux causes qui déterminent les événemens. Son Traité de la colonne est un morceau achevé. Polybe, en bien des endroits, ne peut être entendu que par des Militaires qui ont réfléchi sur une longue expérience ; pour comprendre cet Auteur, il faut être homme de guerre, & quelquefois même un grand homme de guerre : M. de Folard enseigne à l'être. Son érudition est très-tendue ; elle lui donne lieu de comparer les faits, & de peindre toujours par les actions un grand nombre de personnages, dont les vices & les défauts ne sont pas moins utiles à l'instruction que leurs vertus & leurs belles qualités. Les Héros qui ont fait le plus de bruit, ceux dont une longue suite de siècles paroît avoir assuré la réputation, n'ont pas pour cela plus de droit à son estime : il ne l'accorde qu'aux actions judicieuses ; il y en a de très-éclatantes qu'il a le courage de mettre au nombre des accidens & des hasards, parce qu'elles ne sont fondées sur aucune raison solide, & que ce qui se fait à la guerre sans but & sans dessein, ne mérite pas le nom d'action.

Je ne finis qu'avec peine sur les touranges que mérite l'excellent Ouvrage de M. le Chevalier de Folard : je me flatte que le Lecteur me pardonnera cette longue digression en faveur d'un Ecrivain qui fait tant d'honneur à notre Nation ; & dont, je ne sçais par quelle fatalité, il me semble que les Etrangers font plus d'usage que nous : nos jeunes Militaires devroient le lire au moins une fois tous les six mois ; indépendamment de leur métier, ils y apprendroient à s'exprimer avec noblesse : plusieurs personnes lui reprochent une trop grande prolixité, d'autres le trouvent fort excusable, parce qu'il s'agit principalement d'instruire ; ce qui est égal à ceux qui sçent

fenfible , & qui parle aux yeux ? Regardez la figure 55 , qui peut repréfenter une ville fîtée fur toute la pente d'une colline , où tous les édifices élevés perpendiculairement à l'horifon font d'égale hauteur , c'eft-à-dire , que leurs extrémités T , T , &c. fupérieures , font également éloignées de la bafe horifontale AB : il eft évident qu'il n'y aura pas plus d'édifices fur la ligne ferpentante ACDHB , que fur la droite horifontale TTT ; mais cette ligne eft égale à la bafe AB ; par conféquent on ne fçauroit conftruire plus d'édifices fur la pente d'une colline , que fur le plan horifontal qui lui fert de bafe : ainfi les terrains deftinés aux plantations doivent être mefurés par le plan horifontal qui leur répond ; ceux qui les évaluent fuivant la furface de leur pente , vont directement contre les principes de la vraie Phyfique , & commettent des erreurs très-confidérables.

Car fupposons qu'un verger en forme de parallélogramme rectangle ABCD (fig. 56.) , foit incliné de 30 degrés à l'horifon , que fa longueur AB = 8 perches , & que fa largeur AD (fur laquelle fe prend l'inclinaifon) en contienne 4 : en mefurant ce verger fuivant fa pente , fon terrain contiendra 32 perches quarrées ; mais en l'éva-

vent la guerre , eft néceffaire à ceux qui l'apprennent. Cela me fait fouvenir d'un endroit fort remarquable dans la vie de M. le Marquis de Feuquières. Il y a un grand nombre de ces maximes (militaires) qui paroîtront peut-être à certains efprits de peu de valeur , parce qu'elles font d'un ufage trop commun. Mais c'eft pour cela même que le Marquis de Feuquières les croyoit plus néceffaires.

Il lifoit à un de fes amis le Chapitre de l'ouverture de la tranchée , où il marque qu'il faut jeter la terre du côté de la Place ; cette obfervation parut triviale. N'importe , répondit-il , il faut la laiffer. Auroit-il prévu qu'on dût y manquer au dernier fiège de Philisbourg ? Cette bétue ne peut être attribuée qu'à l'Officier qui conduifoit les Travailleurs , & qui les a placés d'un côté de la trace de la tranchée , lorsqu'il auroit dû les placer de l'autre. Il n'eft pas moins furprenant que perfonne ne s'en foit apperçu que le matin. On ne fçauroit donc être trop attentif à inftruire les jeunes Officiers.

64 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

luant, comme on le doit, eu égard à son plan hori-
 zontal, on ne trouvera que 27 perches 6 toises
 12 pieds quarrés. La fausse mesure excède donc
 la véritable de 38 toises quarrées & 24 pieds
 quarrés; ce qui est un très-grand objet sur 27 per-
 ches, 6 toises, 12 pieds quarrés.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'inclinaison du verger se prend suivant
 la largeur $AD = 4$ perches; soit AM , une ligne
 horizontale (*fig. 57.*) sur laquelle AD soit élevée
 de 30 degrés; c'est-à-dire, qu'en décrivant un
 cercle du point A avec la ligne AD , on fasse l'an-
 gle $DAM = 30$ degrés. Imaginez la perpendi-
 culaire DS sur l'horizontale AM : cette perpendi-
 culaire déterminera la largeur AS du plan hori-
 zontal, qui répond au plan incliné $ABCD$; cher-
 chons donc la valeur de AS .

Remarquons d'abord qu'en prenant un arc MO
 égal à l'arc DM , on aura $DMO = 60$ de-
 grés; ainsi DSO qui est la corde de cet arc, vaut
 le rayon AD : car il a été prouvé (n°. 119.)
 que le rayon du cercle étoit égal à la corde de 60
 degrés. De plus DAO étant un triangle isoscèle,
 la perpendiculaire AS divisera la base DSO en
 deux parties égales (n°. 79.). DS est donc la
 moitié du rayon $AD = 4$ perches: ainsi DS
 $= 2$ perches.

Considérons présentement le triangle rectangle
 ADS : le carré de l'hypothénuse AD est égal
 à la somme des carrés faits sur les deux autres
 côtés DS , AS (n°. 186.), c'est-à-dire, \overline{AD}^2
 $= \overline{AS}^2 + \overline{DS}^2$. Donc $\overline{AD}^2 - \overline{DS}^2 = \overline{AS}^2$;
 ou (en substituant les nombres à la place des lignes
 AD ,

AD, DS) 16 — 4 = AS = 12. Donc AS =

✓ 12 perches carrées.

Pour avoir la valeur de AS très-rapprochée, réduisez 12 perches carrées en 559872 pouces carrés, dont la racine carrée = 748 pouces courans, valeur de AS, qui exprime la véritable largeur du verger incliné ABCD. Multipliant donc la longueur AB = 8 perches ou 1728 pouces, par la largeur 748, le produit 1292544 donnera en pouces carrés la surface du verget; & rappelant ce dernier nombre à de plus grandes mesures, on trouvera que le terrain ABCD qui contiendrait 32 perches carrées, s'il n'avoit aucune pente, ne pourra être évalué que sur le pied de 27 perches, 6 toises, 12 pieds carrés, lorsqu'il sera incliné de 30 degrés à l'horison (a).

(a) Ceci est surtout à considérer dans la coupe des bois; les Acheurs sont exposés à les payer beaucoup plus qu'ils ne croient, principalement le bois taillis, qui se vend suivant l'étendue du terrain qu'il occupe.

Il faut donc savoir que l'on distingue deux sortes de bois; bois de haute futaie & bois taillis. Le bois de haute futaie est un bois que l'on a laissé croître en grands arbres; on ne lui donne guères ce nom avant l'âge de quarante ou cinquante ans, il y en a qui ont cent ans, & même deux cens; dans les ventes on ne sauroit tromper les Acheurs sur la quantité de ce bois, parce que les arbres de haute futaie se comptent facilement.

Le bois taillis est fort différent; c'est un bois menu & qui n'est pour ainsi dire qu'en branches, à cause qu'on ne lui donne pas le temps de parvenir à un accroissement où il puisse mériter le nom d'arbres; la coupe s'en fait ordinairement de neuf en neuf ans; comme il n'est pas possible de compter toutes les branches qui entrent dans un lot que l'on met en vente, le bois taillis se vend à l'arpent; c'est-à-dire, que l'on détermine une certaine étendue de terrain pour vendre le bois qui est dessus.

Or, en supposant que les différentes portions de ce terrain soient également favorables aux bois, on voit combien il est important de se rendre attentif aux pentes, aux creux, aux inégalités dont il est coupé. Car si les Arpenteurs ont égard aux pentes ou aux creux, il est certain que les Acheurs seront trompés; puisque, à surface égale, il croîtra nécessairement plus d'arbres sur un terrain horizontal ou de niveau, que sur un terrain incliné, ainsi que je l'ai démontré dans l'observation du n°. 208.

66 PRINCIPES DE L'ARPENTAGE.

Pour mesurer un coteau, il est donc nécessaire de connoître la largeur du plan horifontal qui lui répond; cependant, comme ce plan s'étend sous le coteau jusqu'à la rencontre des perpendiculaires que l'on supposeroit abaissées du sommet de ce coteau, il ne paroît pas aisé de connoître cette largeur: néanmoins le moyen est si simple, qu'on va le comprendre à la seule exposition.

PROBLÈME XCIII.

209. Trouver la largeur AS du plan horifontal ABOS, par lequel on doit mesurer le coteau ABCD (*fig. 56.*).

RÉSOLUTION.

Voyez la figure 58, dans laquelle AS représente la largeur du plan qui répond à la pente DA. Sur le sommet D du coteau placez horifontalement une grande équerre DLG, dont les branches DL, LG soient d'une grandeur connue. Faites successivement la même opération aux points G, O, en marchant sur la même ligne DGOA: les trois longueurs DL, GP, OT vous donneront la largeur AS du plan horifontal qui répond au coteau. Il y a plus, les trois lignes LG, PO, TA en mesureront la hauteur DS. Cela parle aux yeux.

210. Nous avons dit que les inégalités & la pente des terrains devoient être considérées, quand il s'agissoit de les revêtir; parce que le revêtement doit envelopper tout le terrain, qu'il en suit les creux, les convexités, tous les contours: en ce cas on divisera la surface des collines en quarrés, en parallélogrammes ou en triangles, qui soient assez petits pour ne pas différer sensiblement de surfaces

lans ; on les évaluera sur le pied de véritables lans , ainsi que nous l'avons enseigné très au long dans ce Chapitre.

211. Quand on a deux dimensions, dont une ou toutes les deux sont composées de perches, de toises, de pieds, de pouces, &c. & qu'il s'agit de les multiplier l'une par l'autre, on a vu que l'on réduisoit ces deux dimensions à la plus petite espèce, c'est-à-dire, que si elles contenoient des perches, des toises & des pieds, on mettoit en pieds l'une & l'autre dimension, & qu'on les réduisoit en pouces, en lignes ou en points, quand avec les perches, les toises, les pieds, il se trouvoit outre cela quelques pouces, quelques lignes ou quelques points ; que ces deux dimensions ainsi réduites, par exemple, en pouces, se multiplioient l'une l'autre, & donnoient en pouces quarrés la valeur du terrain, auquel ces dimensions appartenoient ; qu'il falloit ensuite déterminer par le secours de la division, les perches, les toises ou les pieds quarrés contenus dans ces pouces quarrés.

Mais cette opération est d'un grand détail, elle marche très-lentement vers le résultat que l'on cherche. Cependant les Arts tendent à l'épargne du tems. On ne veut pas seulement arriver, on veut arriver vite. En considérant des quantités d'une autre espèce que celle dont nous avons fait mention jusqu'à présent, le calcul en devient beaucoup plus expéditif : si avec cela la Théorie n'en est pas plus profonde, il doit être préféré dans la pratique ; or c'est ce que nous allons faire voir, en exposant le principe & la méthode de ce calcul.





CHAPITRE II.

DU TOISÉ DES SURFACES.

Méthode plus simple que celle dont on s'est servi dans le Chapitre précédent. Exposition du principe de cette méthode. Application à des Exemples.

212. **E**XAMINONS la figure ABCD (*fig. 59*), où nous supposons que AB ou DC = 3 toises ; que DA perpendiculaire sur AB = 1 toise : à cette condition le Rectangle ABCD = 3 toises quarrées. A la ligne AB ajoutons BF = 1 pied : le Rectangle BCOF est ce que l'on appelle *un pied de toise quarrée* ; & comme il y a 6 pieds courans dans une toise courante , il s'ensuit qu'une toise quarrée contient 6 pieds de toise quarrée , comme le montre plus particulièrement la toise quarrée ARSD , dont on a divisé les côtés opposés AR , DS en pieds , afin d'avoir six Rectangles , dont chacun contient un pied de base sur une toise de hauteur , ou , ce qui revient au même , un pied de hauteur sur une toise de base. Un pied de toise quarrée est donc un Rectangle large d'un pied & long d'une toise. Il est contenu 6 fois dans une toise quarrée : or une toise quarrée contient 36 pieds quarrés ; ainsi un pied de toise quarrée = 6 pieds quarrés , qui sont la sixième partie d'une toise quarrée.

Prenons encore FY = 1 pouce : le Rectangle OFYX est *un pouce de toise quarrée* ; c'est-à-dire , une surface longue d'une toise & large d'un pouce.

Il y a 12 pouces dans un pied, & 72 pouces dans une toise. Ainsi le pied de toise quarrée contient 12 pouces de toise quarrée, & la toise quarrée = 72 pouces de toise quarrée.

De même une ligne de toise quarrée est un Rectangle dont la longueur = une toise, & la largeur vaut une ligne.

Un point de toise quarrée est aussi une surface longue d'une toise, & large d'un point.

Cette manière d'envisager les surfaces pour en calculer l'aire est très-commode; parce que la toise quarrée = 6 pieds de toise quarrée. Le pied de toise quarrée = 12 pouces de toise quarrée. Le pouce de toise quarrée = 12 lignes de la même toise, & la ligne de toise quarrée en vaut 12 points; ce qui ramène le principe du calcul des surfaces à celui des longueurs, où l'on doit être très-exercé avant d'arriver à celui-ci.

PREMIER EXEMPLE;

Où l'on donne la manière de toiser une surface dont la longueur contient des toises, des pieds, des pouces, & la largeur ne contient que des toises.

213. Supposons qu'il s'agisse de multiplier 3 toises, 1 pied, 1 pouce, par une toise.

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.
3	1	1
1		
(A)		
<hr/>		
3	1	1
<hr/>		
Eiii		

Disposez ces deux dimensions l'une sous l'autre comme vous le voyez en A, & commençant par les pouces, multipliez successivement 1 pouce, 1 pied, 3 toises par 1 toise; dites: 1 pouce par 1 toise = 1 pouce de toise quarrée, c'est-à-dire, suivant le principe que nous venons d'établir (n°. 212.) = un Rectangle long d'une toise & large d'un pouce; écrivez 1 sous les pouces. Ensuite: 1 toise par 1 pied = 1 pied de toise quarrée; écrivez 1 sous les pieds: enfin: 1 toise par 3 toises = 3 toises quarrées; marquez 3 sous les toises: en sorte que, par cette méthode de calcul, 3 toises, 1 pied, 1 pouce, multipliées par 1 toise, donnent 3 toises quarrées, 1 pied de toise quarrée & 1 pouce de toise quarrée. Le Problème est donc aussi-tôt résolu qu'il est proposé.

Mais en travaillant par les pieds & les pouces quarrés, on auroit mis d'abord trois toises, un pied, un pouce, en pouces, pour avoir 229 pouces: on auroit réduit pareillement une toise en 72 pouces; après cela multipliant 229 pouces par 72 pouces, dont le produit seroit 16488 pouces quarrés, il faudroit diviser ce produit par 5184, afin d'avoir les toises quarrées contenues dans 16488, à cause que la toise quarrée = 5184 pouces quarrés: cette division donneroit 3 toises quarrées au quotient; il resteroit encore 936 pouces quarrés que l'on réduiroit en pieds quarrés, en divisant 936 par 144; parce que le pied quarré = 144 pouces quarrés, on trouveroit au quotient 6 pieds quarrés = 1 pied de toise quarrée, & 72 pouces quarrés de reste = 1 pouce de toise quarrée: calcul énorme en comparaison du précédent, qui s'est trouvé fait dès-là qu'il a été proposé.

C'est pourquoi nous allons continuer à calculer l'aire des surfaces sur le principe du n°. 212. en parcourant les différens cas qui pourroient apporter quelque embarras aux Comménçans.

DEUXIÈME EXEMPLE.

Semblable au premier.

214. On propose de multiplier 10 toises, 4 pieds, 8 pouces par 5 toises.

O P É R A T I O N.

Toises.	Pieds.	Pouces.
10	4	8
5		
<hr/>		
53	5	4
<hr/>		

Disposez ces deux dimensions, comme vous avez fait au premier Exemple; après quoi vous multiplierez 5 toises par 8 pouces = 40 pouces de toise quarrée, parce que, suivant le principe du n°. 212, les pouces qui multiplient des toises, donnent des pouces de toise quarrée, dont il en faut 12 pour un pied de toise quarrée. Posez donc 4 sous les pouces; & retenant 3 pieds de toise quarrée, vous direz: 5 toises par 4 pieds = 20 pieds de toise quarrée, lesquels ajoutés aux 3 pieds que l'on a retenus, donnent 23 pieds de toise quarrée, qui valent 3 toises quarrées, & 5 pieds de toise quarrée; vous poserez donc 5 sous la colonne des pieds, & vous retiendrez 3 toises quarrées pour la colonne suivante, où multipliant 5 toises par 10 toises, vous aurez 50 toises quarrées, auxquelles vous ajouterez les 3 toises de la colonne précédente, pour avoir en tout 53 toises quarrées, 5 pieds de toise quarrée & 4 pouces de la même toise.

TROISIÈME EXEMPLE.

215, Pour multiplier 59 toises, 2 pieds, 7 pouces, par 75 toises.

O P É R A T I O N.

	Toises.	Pieds.	Pouces.	
	59	2	7	
	75			
	<hr/>			
	4295			
	413.			(B)
Pour 2 pieds	25			
Pour 6 pouces	6	1	6	
Pour 1 pouce	1	0	3	
	<hr/>			
	4457	1	9	
	<hr/>			

On commencera par multiplier 59 toises par 75 toises, ainsi qu'il est exécuté en B : car si l'on multiplioit, comme dans les Exemples précédens, 7 pouces par 75 toises, on auroit besoin de la division pour réduire en pieds le grand nombre de pouces qui proviendroient de cette multiplication ; ce que l'on doit toujours éviter.

Cette première Opération étant faite, il s'agit de multiplier 2 pieds par 75 toises : pour cela considérez que si les 2 pieds valoient 1 toise, vous auriez 75 toises quarrées ; mais 2 pieds ne sont que le tiers d'une toise ; vous ne prendrez donc que le tiers de 75 = 25 toises, que vous écrirez sous la colonne des toises. Il reste à multiplier 7 pouces par 75 toises. Prenons d'abord la valeur de 6 pouces, nous prendrons ensuite celle de 1 pouce : or 6 pouces sont le quart de deux pieds ; mais 2 pieds multipliés par 75 ont donné 25 toises quarrées, par conséquent le quart de 2 pieds ou 6 pouces multipliés par 75 toises produiront le quart de 25 toi-

ses quarrées ; vous direz donc : le quart de 25 toises quarrées = 6 toises quarrées , que vous poserez au rang des toises quarrées ; mais il reste 1 toise quarrée qui vaut 6 pieds de toise quarrée : vous prendrez le quart de 6 = 1 pied de toise quarrée ; vous écrirez 1 sous la colonne des pieds : il reste encore 2 pieds de toise quarrée = 24 pouces , dont le quart = 6 pouces de toise quarrée ; vous marquerez 6 sous la colonne des pouces.

Enfin vous multiplierez 75 toises par 1 pouce , pour avoir 75 pouces de toise quarrée = 1 toise quarrée , & 3 pouces de toise quarrée : écrivez 1 au rang des toises , & 3 sous les pouces. Après cela , faisant l'addition de ces différens produits , vous trouverez que leur somme = 4457 toises , 1 pied , 9 pouces de toise quarrée.

QUATRIÈME EXEMPLE.

216. On demande le produit de 45 toises , 5 pieds , 11 pouces , 9 lignes , par 34 toises.

O P É R A T I O N .

	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	
	45	5	11	9	(C)
	34				
	180	0	0	0	
	135				
Pour 3 pieds	17	0	0	0	
Pour 2 pieds	11	2	0	0	
Pour 6 pouces	2	5	0	0	
Pour 3 pouces	1	2	6	0	
Pour 2 pouces		5	8	0	
Pour 6 lignes		1	5	0	
Pour 3 lignes			8	6	
	3563	5	3	6	

Après les avoir disposées, comme elles le sont en C, on multipliera d'abord 45 toises par 34 toises.

Après quoi l'on passera à la multiplication de 5 pieds par 34 toises; & afin que cette Opération cause moins d'embarras, on considérera 5 pieds comme 3 pieds, & 2 pieds, dont le premier nombre est la moitié d'une toise, & le second en est le tiers. Faites donc ce raisonnement: si 3 pieds étoient 1 toise, 3 pieds multipliés par 34 toises donneroient 34 toises quarrées; mais trois pieds ne sont que la moitié d'une toise; on prendra donc la moitié de $34 = 17$ toises quarrées, que l'on écrira au rang des toises. Par la même raison deux pieds n'étant que le tiers d'une toise, il ne faudra prendre que le tiers de 34 toises pour le produit de 2 pieds par 34 toises; ainsi l'on dira: le tiers de $34 = 11$ toises quarrés, & il reste une toise, dont le tiers = 2 pieds de toise quarrée; écrivez donc 11 toises sous les toises, & 2 pieds sous les pieds,

Il s'agit présentement de multiplier 11 pouces par 34 toises. Soit donc, pour la commodité du calcul, le nombre 11 coupé en 6, 3, 2; prenons d'abord pour 6 pouces, qui sont le quart de deux pieds: or deux pieds multipliés par 34 toises ont produit 11 toises 2 pieds; ainsi le produit de 6 pouces par 34 toises doit être le quart de 11 toises 2 pieds = 2 toises 5 pieds, que l'on trouve en disant: le quart de 11 = 2 toises; il reste 3 toises = 18 pieds, lesquels ajoutés à 2 = 20 pieds, dont le quart = 5 pieds de toise quarrée.

Pour 3 pouces on prendra la moitié de la valeur de 6 pouces: or 6 pouces par 34 toises viennent de nous donner 2 toises, 5 pieds; ainsi 3 pouces par 34 toises donneront la moitié de 2 toises, 5 pieds = 1 toise, 2 pieds, 6 pouces, que vous écrirez dans le rang qui convient à chaque espèce de quantité.

Il reste encore 2 pouces à multiplier par 34 toises; & comme 2 pouces sont le tiers de 6 pouces, on prendra le tiers du produit de 6 pouces par 34 toises, c'est-à-dire, le tiers de 2 toises, 5 pieds, en disant: le tiers de 2 n'est point; on mettra les 2 toises en pieds, & l'on aura 12 pieds, lesquels ajoutés à 5 = 17 pieds, dont le tiers = 5 pieds: il reste 2 pieds = 14 pouces, dont le tiers = 8 pouces de toise quarrée, que vous écrirez en place convenable.

Passons à la multiplication de 9 lignes par 34 toises, & considérons que 9 lignes = 6 lignes & 3 lignes; mais 6 lignes sont le quart de 2 pouces: prenons donc le quart de la valeur de 2 pouces que nous avons trouvée de 5 pieds 8 pouces; disons donc: le quart de 5 pieds est 1 pied; il reste 1 pied = 12 pouces, lesquels ajoutés à 8 pouces = 20 pouces, dont le quart = 5 pouces de toise quarrée; de sorte que le produit de 34 toises par 6 lignes est 1 pied, 5 pouces de toise quarrée: on écrira 1 au rang des pieds, & 5 sous la colonne des pouces.

Enfin on prendra pour le produit de 3 lignes par 34 toises, la moitié du produit de 6 lignes par 34 toises que l'on vient de trouver = 1 pied 5 pouces de toise quarrée; ainsi l'on dira: la moitié de 1 n'est point; on mettra le pied en 12 pouces, lesquels ajoutés à 5 = 17 pouces, dont la moitié = 8 pouces: il reste 1 pouce = 12 lignes, dont la moitié est 6 lignes. Le produit de 3 lignes par 34 toises est donc 8 pouces, 6 lignes de toise quarrée. On écrira ce produit sous les colonnes qui lui conviennent, & faisant l'addition de tous les produits que l'on a trouvés successivement, on voit que 45 toises, 5 pieds, 11 pouces, 9 lignes, multipliées par 34 toises, donnent 1563 toises, 5 pieds, 3 pouces, 6 lignes de toise quarrée.

CINQUIÈME EXEMPLE.

217. Quel est le produit de 15 toises, 5 pouces, par 18 toises.

O P É R A T I O N.

	Toises.	Pieds.	Pouces.
	15	0	5
	18		
	<hr/>		
	120		
	<hr/>		
	15.		
Pour 1 pied	4	0	0
Pour 4 pouces	1	0	0
Pour 1 pouce		1	6
	<hr/>		
	271	1	6
	<hr/>		

Ayant multiplié à l'ordinaire 15 toises par 18 toises, il s'agit de multiplier 5 pouces par 18 toises. Pour y parvenir plus facilement, nous supposons que 5 pouces soient 1 pied, & nous dirons: 18 toises multipliées par une toise donneroient 18 toises quarrées; mais 1 pied n'est que la sixième partie de 1 toise; donc 18 toises multipliées par 1 pied produiront le sixième de 18 toises quarrées = 3 toises quarrées: vous écrirez 3; sur lequel vous tirerez un trait, parce que ce nombre ne doit point entrer dans l'addition des produits que nous cherchons; son usage est de faire trouver plus commodément le produit de 5 pouces par 18 toises; mais 5 pouces valent 4 pouces & 1 pouce. Or 4 pouces font le tiers de 1 pied; par conséquent le produit de 4 pouces par 18 toises n'est que le tiers du produit de 1 pied par 18 toises: nous avons vu que ce dernier produit étoit 3 toises quarrées; vous direz donc: le tiers de 3 = 1: écrivez 1 sous la colonne des toises.

Il reste à trouver la valeur de 1 pouce par 18 toi-

ses ; mais 1 pouce est le quart de 4 pouces ; prenez donc le quart de la valeur de 4 pouces , en disant : le quart de 1 n'est point ; mais une toise = 6 pieds , dont le quart = 1 pied ; il reste 2 pieds = 24 pouces , dont le quart = 6 pouces de toise quarrée ; de sorte que le produit de 18 toises par 1 pouce = 1 pied & 6 pouces de toise quarrée. Marquez 1 sous la colonne des pieds , & 6 sous celle des pouces : faites enfin l'addition des différens produits que vous venez de trouver ; vous aurez 271 toises , 1 pied , 6 pouces de toise quarrée , pour le produit de 15 toises , 5 pouces , par 18 toises.

SIXIÈME EXEMPLE.

218. Déterminer le produit de 25 toises , 3 pieds , 8 lignes , par 32 toises.

O P É R A T I O N .

	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
	25	3	0	8
	32			
	<hr/>			
	50			
	75.			
Pour 3 pieds	16			
Pour 1 pied	8	6		
Pour 1 pouce		6	8	
Pour 6 lignes		1	4	
Pour 2 lignes			5	4
	<hr/>			
	816	1	9	4
	<hr/>			

Commencez par multiplier 25 toises par 32 toises : cette Opération étant finie , vous chercherez le produit de 3 pieds par 32 toises , en observant que 1 toise multipliée par 32 toises produiront 32 toises quarrées : or 3 pieds ne sont que la moitié d'une toi-

se; ainsi 3 pieds multipliés par 32 toises \equiv 16 toises quarrées. Ecrivez donc 16 sous les toises.

Il faut maintenant trouver le produit de 8 lignes par 32 toises: cherchons d'abord celui de 1 pied pour avoir le produit de 1 pouce, d'où nous tirerons celui de 8 lignes; mais puisque le produit de 3 pieds \equiv 16 toises quarrées, celui de 1 pied sera le tiers de 16 toises \equiv 5 toises, & il reste 1 toise \equiv 6 pieds, dont le tiers \equiv 2 pieds; écrivez donc 5 toises, 2 pieds, que vous couperez par un trait. Prenons encore le produit de 1 pouce: c'est le douzième de 1 pied; disons donc: le douzième de 5 toises n'est point; mais 5 toises quarrées \equiv 30 pieds de toise quarrée, lesquels ajoutés à 2, font 32 pieds de toise quarrée, dont le douzième \equiv 2 pieds, & il reste 8 pieds \equiv 96 pouces, dont le douzième \equiv 8 pouces de toise quarrée. Ecrivez 2 pieds, 8 pouces, que vous couperez encore d'un trait; parce que ce produit, comme le précédent, n'est supposé que pour arriver plus facilement à celui de 32 toises par 8 lignes, qu'il nous faut à présent déterminer.

Prenons pour 6 lignes: c'est la moitié du produit de 1 pouce; on aura donc 1 pied, 4 pouces: écrivons 1 sous les pieds, & 4 sous les pouces; il reste encore à trouver le produit de 2 lignes, c'est-à-dire, le tiers de 6 lignes; il faut donc prendre le tiers de 1 pied 4 pouces \equiv 5 pouces, 4 lignes. Après cela, faisant l'addition de tous ces produits, on trouvera que 25 toises, 3 pieds, 8 lignes, multipliées par 32 toises, donnent 816 toises, 1 pied, 9 pouces, 4 lignes.

SEPTIÈME EXEMPLE.

219. Trouver le produit de 13 toises, 5 lignes, par 19 toises.

OPÉRATION.

	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.
	13	0	0	5
	19			
	<hr/>			
	117			
	13.			
Pour 1 pied	4	1		
Pour 1 pouce		1	1	
Pour 4 lignes			6	4
Pour 1 ligne			1	7
	<hr/>			
	247	0	7	11
	<hr/>			

On multipliera à l'ordinaire 13 toises par 19 toises; après quoi on aura à multiplier 5 lignes par 19 toises; mais auparavant on supposera le produit de 1 pied, & celui de 1 pouce, pour en déduire avec plus de facilité celui de 5 lignes: or 1 pied par 19 toises = 3 toises, 1 pied, que vous couperez d'un trait. Prenons encore le produit de 1 pouce: c'est le douzième de 1 pied. Disons donc: le douzième de 3 toises n'est point; mettant les 3 toises en pieds, auxquels nous ajouterons 1, nous aurons 19 pieds, dont le douzième = 1 pied de toise carrée; il reste 7 pieds = 84 pouces, dont la douzième partie = 7 pouces de toise carrée: écrivons 1 sous les pieds, & 7 sous les pouces, sur lesquels nous tirerons un trait. Il n'est pas difficile à présent d'avoir le produit de 5 lignes par 19 toises: car 5 lignes = 4 lignes & 1 ligne: or 4 lignes sont le tiers de 1 pouce; prenons le tiers de la valeur de 1 pouce que nous avons trouvé = 1 pied, 7 pouces, en disant: le tiers de 1

piéd n'est point; mettant ce piéd en pouces, auquel on joindra 7 pouces, nous aurons 19 pouces, dont letiers = 6 pouces, & il reste 1 pouce = 12 lignes, dont le tiers = 4 lignes de toise quarrée; le produit de 4 lignes par 19 toises est donc 6 pouces, 4 lignes de toise quarrée; écrivons 6 sous les pouces, & 4 sous les lignes.

Il reste à trouver le produit de 1 ligne par 19 toises: c'est le quart de 4 lignes; ainsi nous dirons: le quart de 6 est 1, & il reste 2 pouces = 24 lignes, auxquelles ajoutant 4 lignes, on a 28 lignes, dont le quart = 7; on écrira 1 sous les pouces, & 7 sous les lignes. On ajoutera tous les produits que l'on vient d'écrire, & l'on trouvera que le produit de 13 toises, 5 lignes par 19 toises = 247 toises, 7 pouces, 11 lignes de toise quarrée.

HUITIÈME EXEMPLE,

Où les deux dimensions qui se multiplient, sont composées chacune de toises, pieds, pouces, &c.

220. Soit proposé de multiplier 12 toises, 1 piéd, 7 pouces, 5 lignes, par 5 toises, 2 pieds, 9 pouces.

O P É R A T I O N.

	Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
	12	1	7	5	0
	5	2	9		(M)
	60	5			
Pour 6 pouces		2	6		
Pour 1 pouce			5		
Pour 4 lignes			1	8	
Pour 1 ligne				5	
Pour 2 pieds	4	0	6	5	8
Pour 6 pouces	1	0	1	7	5
Pour 5 pouces		3	0	9	8 $\frac{1}{2}$
	66	5	9	11	9 $\frac{1}{2}$

Disposez

Disposez ces deux dimensions comme vous le voyez en M; & sans faire d'abord attention aux 2 pieds 9 pouces, de la seconde dimension, multipliez successivement 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes par cinq toises, en disant : 5 fois 12 = 60 toises quarrées; écrivez 60 sous les toises; dites ensuite : 5 toises multipliées par 1 pied = 5 pieds de toise quarrée; écrivez 5 sous les pieds. Après cela, vous viendrez aux 7 pouces, que vous regarderez comme 6 pouces & 1 pouce. Vous direz donc : 6 pouces sont la moitié de 1 pied; par conséquent il faudra prendre la moitié du produit de 1 pied, & dire : la moitié de 5 pieds = 2 pieds, 6 pouces, que l'on écrira : pour chercher ensuite le produit de 1 pouce; c'est le sixième de 6 pouces, c'est-à-dire, le sixième de 2 pieds 6 pouces, ou de 30 pouces = 5 pouces de toise quarrée; écrivez 5 sous les pouces, & passez au produit de 5 toises par 5 lignes : or 5 lignes = 4 lignes & 1 ligne; prenez d'abord pour 4 lignes : c'est le tiers de la valeur de 1 pouce, ou le tiers de 5 pouces de toise quarrée = 1 pouce 8 lignes; en prenant encore le quart de ce dernier produit = 5 lignes de toise quarrée, on aura le produit de 5 toises par 1 ligne.

Cette première opération étant faite, on travaillera à trouver le produit de 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes, par 2 pieds; mais il est clair que si 2 pieds valaient 1 toise, le produit cherché seroit 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes de toise quarrée; & comme 2 pieds ne sont que le tiers d'une toise, on ne doit prendre que le tiers de 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes = 4 toises, 0 pied, 6 pouces, 5 lignes, 8 points de toise quarrée.

Il reste à trouver le produit de 12 toises, 1 pied, 7 pouces, 5 lignes, par 9 pouces, qui valent 6 pouces & 3 pouces. On prendra donc pour 6 pouces,

qui doivent produire le quart de la valeur de 2 pieds
 = 1 toise, 0 pied, 1 pouce, 7 lignes, 5 points:
 enfin la moitié de ce dernier produit, qui est 3
 pieds, 9 lignes, 8 points $\frac{1}{2}$, donne la valeur de 3
 pouces; faisant l'addition de tous les produits que
 l'on a trouvés, le résultat sera 66 toises, 5 pieds, 9
 pouces, 11 lignes, 9 points $\frac{1}{2}$ de toise carrée.

NEUVIEME EXEMPLE.

221. Trouver le produit de 39 toises, 3 pieds, 4
 pouces, 9 lignes, par 7 toises, 4 pieds, 9 pouces.

OPÉRATION.

Toises. Pieds. Pouces. Lignes. Points.

39	3	4	9	0
7	4	9		

273

3	3			
	2	4		
		3	6	
		1	9	

276	5	9	3		Produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toises.
13	1	1	7		par 2 pieds.
13	1	1	7		par 2 pieds.
3	1	9	4	9	par 5 pouces.
1	3	10	8	4 $\frac{1}{2}$	par 3 pouces.
308	1	8	6	1 $\frac{1}{2}$	

Nous allons abréger le détail de cette Opération,
 afin que les Commenceans s'accoutument à travailler
 par eux-mêmes.

Sans penser aux 4 pieds, 9 pouces de la seconde
 dimension, on cherchera à l'ordinaire le produit de
 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 7 toises.

tes, que l'on trouvera = 276 toises, 5 pieds, 9 pouces, 3 lignes. On passera ensuite à la recherche du produit de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes, par 4 pieds; en considérant que 4 pieds sont les 2 tiers de 1 toise, on prendra les deux tiers ou deux fois un tiers de 39 toises, 3 pieds, 4 pouces, 9 lignes = 13 toises, 1 pied, 1 pouce, 7 lignes, que l'on écrira deux fois.

Enfin comme 9 pouces = 6 pouces & 3 pouces, on cherchera le produit de 6 pouces, qui est le quart de 2 pieds = 3 toises, 1 pied, 9 pouces, 4 lignes, 9 points, dont la moitié 1 toise, 3 pieds, 10 pouces, 8 lignes, 4 points $\frac{1}{2}$, est le produit de 3 pouces. Enfin la somme totale est 308 toises, 1 pied, 8 pouces, 6 lignes, 1 point $\frac{1}{2}$.

DIXIEME EXEMPLE.

222. On demande quel est le produit de 16 toises, 2 pieds, 7 pouces, 3 lignes, par 8 toises, 2 pouces, 4 lignes.

OPERATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
16	2	7	3	0
8	0	2	4	
<hr/>				
128				
2	4			
0	4			
.	0	8		
		2		
4	2	8	4	0
0	2	8	10	5
	0	5	5	8 $\frac{1}{2}$
<hr/>				
132	0	0	4	1 $\frac{3}{4}$

On multipliera d'abord 16 toises, 2 pieds, 7 pouces, 3 lignes, par 8 toises, ainsi qu'on l'a déjà pratiqué tant de fois. Après cela, on cherchera le produit de cette première dimension par 2 pouces; ce que l'on exécutera plus commodément, en supposant le produit de 1 pied = 2 toises, 4 pieds, 5 pouces, 2 lignes, 6 points, sur lesquels on tirera un trait, afin qu'on ne les fasse pas entrer dans le résultat des différens produits; & comme 2 pouces sont le sixième de 1 pied, on prendra la sixième partie de la valeur de 1 pied = 2 pieds, 8 pouces, 10 lignes, 5 points.

Il reste à trouver la valeur de 4 lignes, qui sont un sixième de 2 pouces = 5 pouces, 5 lignes, 8 points & $\frac{1}{6}$ de point de toise carrée: on fera la somme de tous les produits trouvés; elle sera 132 toises, 4 lignes, 1 point $\frac{1}{6}$.

ONZIÈME EXEMPLE.

223. Déterminer le produit de 24 toises, 2 pouces, 6 lignes, par 20 toises, 4 lignes.

O P É R A T I O N.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
24	0	2	6	0 (C)
20	0	0	4	
<hr/>				
480	3	4	0	
.	.	10		
4	0	0	8	
	2	0	0	8
		8	0	1 $\frac{2}{3}$
<hr/>				
480	4	10	0	1 $\frac{2}{3}$
<hr/>				

Après avoir disposé les termes, comme ils le sont en C, on multipliera tous les termes de la première dimension par les 20 toises de la seconde, en disant : 24 fois 20 = 480 toises ; & au lieu de supposer le produit de 1 pied par 20 toises, afin d'avoir celui de deux pouces, ainsi que nous l'avons pratiqué ci-devant, on dira tout d'un coup : 20 toises multipliées par 2 pouces = 40 pouces de toise quarrée = 3 pieds, 4 pouces ; on écrira 3 pieds, 4 pouces : après quoi, 6 lignes multipliées par 20 toises = 120 lignes de toise quarrée = 10 pouces.

Il s'agira ensuite de multiplier 24 toises, 2 pouces, 6 lignes, par 4 lignes : pour cela, on supposera le produit de la première dimension par 1 pied, d'où l'on déduira celui de 1 pouce, pour avoir le produit de 4 lignes. Le produit de 1 pied = 4 toises, 5 lignes ; & celui de 1 pouce = 2 pieds, 5 points : on coupera d'un trait ces deux produits, & l'on prendra le tiers du dernier = 8 pouces, 1 point, & $\frac{2}{3}$ de point pour la valeur de 4 lignes ; & le produit total sera 480 toises, 4 pieds, 10 pouces, 1 point, & $\frac{2}{3}$ de point.

224. Nous ne croyons pas qu'il soit besoin d'un plus grand nombre d'Exemples : tous les cas un peu embarrassans ont été proposés & détaillés avec soin. On a laissé dans quelques-uns quelque chose à faire aux Commençans. En général même, lorsqu'ils seront un peu exercés au calcul du toisé, nous leur conseillons de travailler sur nos Exemples, sans lire le détail dont nous les avons accompagnés ; en comparant leur résultat au nôtre, ils auront un moyen de s'assurer de la justesse de leur calcul.

Mais comme il est utile de vérifier ses Opérations, on ne doit pas ignorer les moyens d'y parvenir. Le plus simple est de recommencer ; il n'est pourtant pas rare de faire la même faute au même

endroit : c'est pourquoi il vaut mieux changer le point de vue , doubler , par exemple , la premiere ou la seconde dimension , & prendre la moitié de l'autre ; les multiplier ensuite à l'ordinaire : le produit qui en résultera , doit être égal à celui que l'on avoit avant le changement. L'application de ce procédé à un seul Exemple , ne laissera rien à desirer.

DOUZIEME EXEMPLE,

Où l'on expose un moyen très simple de vérifier un Calcul.

225. Prenons l'Exemple précédent , où nous avons trouvé que le produit de 24 toises , 2 pouces , 6 lignes , par 20 toises , 4 lignes , étoit 480 toises , 4 pieds , 10 pouces , 1 point , & $\frac{2}{3}$ de point de toise quarrée. Doublons la premiere dimension : elle deviendra 48 toises , 5 pouces ; & la moitié de la seconde fera 10 toises , 2 lignes : multipliant donc 48 toises , 5 pouces , par 10 toises , 2 lignes , nous devons retrouver 480 toises , 4 pieds , 10 pouces , 1 point & $\frac{2}{3}$, comme si l'on n'avoit fait aucun changement. Faisons le calcul.

O P É R A T I O N .

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
48	0	5	0	0
10	0	0	2	
<hr/>				
480	4	2		
8	0	20		
	4	0	0	20
		8	0	1 $\frac{2}{3}$
<hr/>				
480	4	10	0	1 $\frac{2}{3}$
<hr/>				

48 toises multipliées par 10 toises = 480 toises quarrées. Ensuite 5 pouces par 10 toises = 50 pouces de toise quarrée = 4 pieds 2 pouces. Pour avoir le produit de 48 toises, 5 pouces par 2 lignes, on prendra celui de 1 pied = 8 toises, 10 lignes. Celui de 1 pouce vaut 4 pieds, 10 points de toise quarrée. On coupera d'un trait ces deux produits, & on prendra la sixieme partie du dernier = 8 pouces, 1 point $\frac{2}{3}$ pour la valeur de 2 lignes. On cherchera le produit total, & l'on retrouvera, comme dans l'Exemple précédent, 480 toises, 4 pieds, 10 pouces, 1 point & $\frac{2}{3}$.

D É M O N S T R A T I O N.

Prenons un cas très simple. Supposons que l'on ait 6 à multiplier par 4 ; il s'agit de prouver qu'en multipliant la moitié 3 du premier nombre par le double 8 du second, on aura précisément le même produit 24, que l'on auroit eu sans faire aucun changement : cela est assez évident ; car si vous n'avez pris que la moitié du premier nombre, par compensation vous l'avez multiplié par une quantité double : vous rétablissez d'un côté ce que vous avez détruit de l'autre ; ainsi le même effet subsiste ; C. Q. F. D.

Quand on fait l'art d'évaluer les terrains, il est si facile d'en faire le partage, que nous ne saurions nous dispenser d'entretenir les Commençaans sur différens Problèmes qui y ont rapport. Il en résulte une double utilité : l'esprit s'exerce, il s'affermir sur ses principes, il étend ses vues en même tems qu'il travaille pour son propre intérêt. Quoiqu'il y ait des hommes chargés par leur profession de partager les fonds de terre, suivant les différentes conditions établies dans chaque Etat, on s'abuseroit étrangement de penser que cela est suffisant. Tel qui se charge

26 DU TOISÉ DES SURFACES.

d'une opération , se charge encore plus souvent d'y commettre des fautes ; que ce soit mauvaise foi ou ignorance , l'expérience ne le prouve que trop.

Mais on remarque aussi que ceux qui ont la réputation d'être éclairés , ceux principalement qui le sont en effet , sont moins exposés aux fraudes des autres hommes : nous allons donc exposer la manière la plus simple de faire le partage d'un Terrain en tant de parties égales que l'on voudra.





CHAPITRE III.

Du partage des Terreins.

226. **L**es Terreins dont le partage se présente à faire sont des Parallélogrammes, des Trapèzes, des Triangles, des Polygones réguliers, ou toute autre figure qui n'a aucune régularité. Nous allons résoudre ces différens cas, en supposant d'abord que nous puissions commencer la division de ces terrains par où l'opération nous paroîtra la plus commode : quand il faudra partir d'un point donné, nous produirons un moyen fort simple de résoudre cette difficulté.

PROBLÈME XCIV.

227. Diviser un Triangle ABC en autant de parties égales qu'il est nécessaire. (*fig. 60.*)

RÉSOLUTION.

En prenant AC pour la base de ce Triangle, divisez cette base en autant de parties égales qu'on le demande, par exemple, en 5 ; (cette division se fait sur le terrain, en toisant la base AC, qui contient, si l'on veut, 60 toises, dont la cinquième partie = 12 toises, que l'on portera 5 fois sur AC de A en 1, de 1 en 2, &c.) après quoi de l'angle opposé B, tirant les lignes B 1, B 2, &c. le Triangle ABC se trouvera divisé en 5 Triangles égaux en surface.

DÉMONSTRATION.

Tous ces Triangles s'étendent jusqu'au point B ; ils ont par conséquent même hauteur : on a fait d'ailleurs leurs bases égales ; ils sont donc égaux en surface ; (n°. 171.) C. Q. F. D.

PROBLÈME XCV.

228. Partager le Parallélogramme ABCD en 4 parties égales, ou en tout autre nombre de parties égales qu'il en sera besoin. (*fig. 61.*)

RÉSOLUTION.

Divisez , comme ci devant , les côtés AB , DC opposés, chacun en 4 parties égales, ou en 8 , 10 , 12 , &c. si on le demande. Tirez les lignes 11 , 22 , 33 ; elles diviseront le Parallélogramme ABCD en 4 Parallélogrammes égaux.

DÉMONSTRATION.

Par la construction , ces Parallélogrammes ont des bases égales , ils sont posés entre les mêmes parallèles AB , DC ; il est donc nécessaire qu'ils soient égaux (n°. 170.) ; ainsi le Parallélogramme ABCD est divisé comme on le demande ; C. Q. F. D.

PROBLÈME XCVI.

229. Diviser en tant de parties égales que l'on voudra un Trapèze ABCD , dont les deux côtés AB , DC sont parallèles. (*fig. 62.*)

RÉSOLUTION.

Divisez les deux côtés AB , CD parallèles , chacun en 3 parties égales , si on le demande. Aux points 1 , 2 , tirez les lignes 11 , 22 ; le grand

Trapèze se trouvera divisé en 3 autres Trapèzes égaux en surface.

D É M O N S T R A T I O N .

En traçant les lignes ponctuées $A_1, 1_2, 2_3$, on peut remarquer que le Trapèze $A D 11$ contient deux Triangles $1 D A, 1 A 1$, égaux aux deux Triangles $2 1 1, 2 1 2$, chacun à chacun, qui composent le Trapèze $1 1 2 2$: car le Triangle $1 D A =$ le Triangle $2 1 1$, de même base & de même hauteur (const.) ; & le Triangle $1 A 1 =$ le Triangle $2 1 2$, par la même raison : ainsi le Trapèze $A D 11 =$ le Trapèze $1 1 2 2$.

On prouvera de même que le Trapèze $2 B C 2 =$ le Trapèze $1 1 2 2$; & par conséquent que le grand Trapèze $A B C D$ est divisé en trois parties égales ; C. Q. F. D.

P R O B L È M E X C V I I .

230. Partager un Polygone régulier, par exemple, un Pentagone $A B C D E$, en 9 parties égales ; ce qui peut servir de modèle pour le diviser en tant de parties égales que l'on voudra. (*fig. 63.*)

R É S O L U T I O N .

Puisque l'on demande que le Pentagone régulier soit divisé en 9 parties égales, il est clair qu'en divisant chacun de ses côtés en 9 parties égales, si l'on tiroit des lignes de chaque point de division à son centre O , comme on l'a exécuté sur le côté $A B$, le Polygone se trouveroit divisé en 45 Triangles égaux, à cause qu'ils auroient même base & même hauteur ; mais le neuvième de 45 $=$ 5 ; par conséquent il faut que les lignes $O A, O G$, ou $O G, O M$, &c. renferment entr'elles 5 divisions prises de suite sur les côtés du Polygone : or c'est ce que

l'on a pratiqué sur le Pentagone régulier ABCDE; ce Polygone est donc exactement divisé en 9 parties égales, ce qui n'a pas besoin d'autre démonstration que le procédé même.

231. En général, pour diviser la surface d'un Polygone régulier en autant de parties égales que l'on voudra, on divisera chaque côté du Polygone en ce nombre de parties, & l'on tirera des lignes du centre de ce Polygone, telles que prises deux à deux de suite, elles renferment autant de divisions que le Polygone a de côtés. Si l'on proposoit, par exemple, de partager un Décagone régulier en 15 parties égales, on diviseroit chaque côté de ce Polygone en 15 parties égales, (le Polygone étant régulier, la division d'un seul côté suffiroit à celle des autres) & l'on renfermeroit 10 divisions entre deux lignes tirées du centre aux côtés de ce Polygone. Tout cela est si simple, que, pour en avoir l'évidence, la seule construction est plus que suffisante; on ne doit pourtant pas négliger de la faire exécuter aux jeunes gens, afin qu'ils s'accoutument à voir dans une figure tout ce qui y est contenu.

232. On est quelquefois obligé de commencer le partage d'un Terrain par un point déterminé, auquel doivent se réunir toutes les portions d'un partage: cela arrive lorsque les héritiers souhaitent de posséder en commun un puits, par exemple, dont ils voudroient avoir la jouissance, sans sortir du Terrain qui doit leur revenir; c'est un moyen d'éviter ce que l'on appelle *des servitudes*, qui consistent en ce qu'un des héritiers est obligé de souffrir que les autres jouissent en commun de ce qui devroit lui être particulier, étant enfermé dans son lot.

Il n'y a rien de plus incommode que ces sortes de sujétions; c'est une source perpétuelle de démêlés. On rend donc un service très considérable, lorsque

On trouve les moyens d'éviter cet inconvénient ; ce qui n'est pas toujours possible , car les puits sont quelquefois si proches des maisons , qu'il faudroit les détruire afin d'éviter une servitude : remede qui seroit ordinairement pire que le mal. Nous supposons ici que l'on n'ait d'autre difficulté à vaincre , que celle de faire partir toutes les divisions d'un point déterminé.

PRÉPARATION A LA RÉOLUTION

de ce Problème.

233. On doit se rappeler que l'on détermine l'aire ou la surface d'un Triangle , en multipliant sa hauteur par la moitié de sa base , ou sa base par la moitié de sa hauteur.

Ainsi la surface & la hauteur d'un Triangle (*fig. 64.*) étant données , on a nécessairement la longueur de sa base : car soit l'aire du Triangle $ABC = 96$ toises quarrées , sa hauteur $BO = 8$ toises courantes , & sa base $AC = x$; on aura $96 \text{ toises} = BO \times \frac{AC}{2}$

$$= 8 \times \frac{x}{2} = 4x. \text{ Ainsi } x = \frac{96}{4} = 24 \text{ toises courantes :}$$

en effet , la base 24 toises multipliée par 4 toises , moitié de la perpendiculaire $BO = 8$, donne 96 toises quarrées pour la valeur du Triangle ABC .

On a donc un moyen très simple de trouver la base d'un Triangle, dont la surface & la hauteur sont connues. C'est de diviser le nombre qui exprime la surface du triangle, par celui qui représente la moitié de sa hauteur ; le quotient de cette division fera connoître la longueur de la base de ce Triangle. Il faut se familiariser avec cette vérité ; elle va servir de principe au Problème que nous nous proposons de résoudre.

PROBLÈME XCVIII.

234. Diviser un Terrain quelconque ABCDE en autant de parties égales qu'il est nécessaire, à condition que toutes les divisions commenceront à un même point O pris au-dedans de la figure. (fig. 65.)

RÉSOLUTION.

Supposons qu'il s'agisse de partager ce Terrain en 5 parties égales. On commencera par arpenter tout le Terrain, où l'on pourra trouver 3000 toises quarrées, dont la cinquieme partie = 600.

Après cette opération, du point O on imaginera les lignes OE, OD tirées aux angles E, D, & l'on mesurera le Triangle OED, qui pourra ne contenir que 450 toises quarrées: ce Triangle sera plus petit de 150 toises que la cinquieme partie du Terrain à diviser; il faudra donc prendre sur le Triangle ODC un petit Triangle ODM, qui contienne 150 toises quarrées, lesquelles, ajoutées aux 450 toises du Triangle OED, donnent au juste 60 toises quarrées, cinquieme partie du Terrain proposé.

Pour y parvenir, du point O on abaissera la perpendiculaire OS sur le côté CD: on toisera cette perpendiculaire à laquelle je suppose 60 toises; ces 60 toises expriment la hauteur du Triangle ODM, dont nous savons que l'aire doit contenir 150 toises quarrées; mais (n°. 233.) la surface & la hauteur d'un Triangle étant connues, il est très facile de connoître la longueur de sa base DM: vous n'avez qu'à diviser le nombre 150, qui exprime en toises quarrées la surface du Triangle ODM, par 30, moitié de la hauteur de ce Trian-

gle ; le quotient 5 indiquera qu'il faut porter 5 toises de D en M , & tirer la ligne OM : car alors le Triangle ODM = 150 toises quarrées : en ajoutant la valeur de ce Triangle à celle du Triangle ODE = 450 toises , le quadrilatere OMDE contiendra 600 toises quarrées ; il sera par conséquent la cinquieme partie du terrain ABCDE ; C. Q. F. 1^o. D.

On arpentera ensuite le Triangle OMC : s'il contient 720 toises quarrées , il sera plus grand de 120 toises quarrées que la cinquieme partie du Terrain ABCDE ; il faudra donc retrancher du Triangle OMC le petit Triangle ORC , qui contienne 120 toises quarrées : or ce petit Triangle a pour hauteur la perpendiculaire OS que nous avons supposée = 60 toises ; ainsi (n^o. 233.) divisant 120 par 30 , moitié de la perpendiculaire OS , le quotient 4 exprimera la longueur que l'on doit donner à la base du Triangle ORC , dont l'aire = 120 toises quarrées , & la hauteur = 60 toises courantes : on portera donc quatre toises de C en R , où tirant la ligne OR , le Triangle OMR = 600 toises quarrées , & sera par conséquent au juste la cinquieme partie du Terrain ABCDE ; puisque le Triangle OMR = le Triangle OMC moins le Triangle ORC ; c'est-à-dire, 720 — 120 toises = 600 toises ; C. Q. F. 2^o. D.

Vous continuerez par cette méthode de chercher la cinquieme partie du Terrain ABCDE , en prenant sur le Triangle COB un Triangle CON , lequel , ajouté au Triangle COR , donne 600 toises quarrées : vous prendrez ensuite sur le Triangle BOA le Triangle BOG , qui produise 600 toises quarrées , étant joint au Triangle BON ; & par ce moyen les trois quadrilateres ORCN , ONBG , OGAE seront la cinquieme partie du Terrain

ABCDE; on aura donc divisé ce Terrain en autant de parties égales qu'on le demandoit; C. Q. F. D.

235. L'opération que nous venons de décrire, ne sauroit s'exécuter sur un terrain qui ne permettroit pas que l'on y mesurât les triangles que nous y avons formés : c'est pourquoi, s'il s'agissoit de faire le partage d'un bois, on en lèveroit le plan (n°. 196), sur lequel on feroit le partage dont on a besoin; & rapportant sur le contour du terrain les divisions trouvées sur le circuit du plan, on auroit tous les points qui détermineroient le partage.

OBSERVATION SUR LE PARTAGE

des Terrains.

236. Avant de procéder au partage d'un terrain; on doit se rendre attentif à sa destination. Les circonstances peuvent être telles, qu'à moins d'y construire des maisons ou d'y élever des édifices, l'utilité qui en peut revenir est d'une très petite considération.

Les héritiers qui auront à partager entre eux ces sortes de terrains, auxquels ils ont un droit égal, doivent recevoir des portions égales de leur héritage, bien entendu que l'arpentage se fera du plan horizontal ou de niveau, qui répond au Terrain proposé, en cas qu'il s'y rencontre des pentes ou des inégalités qui méritent d'être considérées : par ce moyen, ceux des héritiers, à qui il échoira un lot où ces inégalités seront fréquentes, auront en récompense plus de surface; autrement on leur feroit une très grande injustice, parce que l'étendue d'un édifice ne s'estime pas à raison de la pente du Terrain sur lequel il est élevé, mais à raison du plan horizontal qui répond au plan incliné, ainsi que

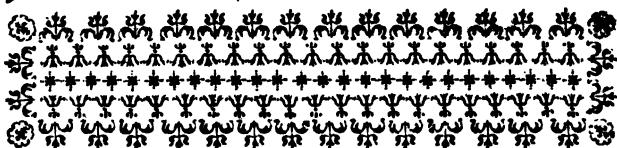
nous

nous l'avons démontré très au long (n°. 208.). J'insiste sur ce point, parce que la plupart des Livres qui traitent de l'Arpentage, n'ont point égard à cette observation, & que j'ai vû des Arpenteurs se conduire par d'autres principes, ou plutôt se livrer à la routine d'évaluer la surface des terrains telle qu'elle se présente, sans avoir égard à l'objet de leur destination.

Si le partage que l'on veut faire, regarde des terres labourables, des prairies, des vergers, des bois; on examinera la nature du sol, c'est à dire, la qualité de la terre, parce que dans un même champ il y a des parties plus fécondes ou d'un meilleur rapport les unes que les autres, ce que l'on apprendra de l'expérience de ceux qui les ont cultivées.

On fera aussi attention aux ravins qui peuvent les couper, aux inondations qui peuvent en emporter l'engrais ou les détrempier outre mesure, à la proximité des bois, d'où les bêtes fauves sont à portée de manger les plantes, ou de les endommager. Il faut même considérer les mauvais vents auxquels certaines parties sont exposées; tandis que d'autres jouissent d'un abri sûr, & bien d'autres choses auxquelles on doit avoir égard; afin que les inconvéniens soient compensés par les avantages, de manière que l'on gagne à peu près d'un côté ce que l'on perd de l'autre.





L I V R E I I I.

GÉOMÉTRIE DE L'ADOLESCENCE,

Où l'on traite des Rapports & des Proportions.

237. **C**ETTE doctrine est plus profonde que la précédente ; elle est nécessaire pour entrer dans tout ce que la Géométrie a de plus élevé. On ne sçauoit plus faire un pas dans les Mathématiques sans la rencontrer, ou sans en avoir besoin. C'est pourquoi j'appelle cette partie & tout ce qui en dépend, *Géométrie de l'adolescence* : elle suppose que l'on ait acquis quelques forces ; que de bonnes institutions aient préparé, ou, pour ainsi dire, aient plié l'ame à réfléchir : cependant nous avons eu un si grand soin de lier cette doctrine à la précédente, que le passage de l'une à l'autre ne se fait presque point sentir ; on doit la regarder, moins comme une nouvelle connoissance, que comme une connoissance qui ne fait que s'étendre.

Tout ce que nous avons à dire sur les Rapports & sur les Proportions, sera renfermé en deux Chapitres. On verra dans le premier les Rapports & les Proportions exprimés numériquement ou algébriquement ; & le second traitera des Proportions des lignes, ou des lignes proportionnelles.

CHAPITRE PREMIER.

*Des Rapports & des Proportions numériques
& algébriques.*

238. **Q**Uand nous avons parlé de la règle de trois, on a pû remarquer qu'elle consistoit à trouver un quatrième terme qui eût un rapport donné avec une quantité connue, quoiqu'alors nous ayons envisagé les grandeurs sous un autre point de vûe.

Un rapport est donc le résultat de la comparaison que l'on fait entre deux quantités. Ce que nous appellons un rapport, est quelquefois nommé une raison : or l'on peut comparer des quantités de deux manières différentes. En comparant 15 à 3, si l'on considère la différence de ces grandeurs c'est un rapport Arithmétique ; mais si l'on cherche à déterminer combien de fois l'une contient l'autre, ou combien de fois l'une est contenue dans l'autre, cette espece de comparaison est appelée rapport Géométrique.

239. Puisqu'un rapport Arithmétique consiste à trouver la différence qu'il y a entre deux grandeurs que l'on compare, il est évident que l'on découvre ce rapport par le moyen de la soustraction ; ainsi l'équation $15 - 3 = 12$, fait voir que le rapport Arithmétique de 15 à 3 est 12.

Mais on ne sçauroit déterminer que par la division combien de fois une grandeur est contenue dans une autre ; la division est donc le seul moyen de trouver un rapport Géométrique ; par conséquent $\frac{15}{3} = 5$ nous montre que le rapport Géométrique de 15 à 3 est 5.

240. L'expression d'un rapport Arithmétique ou Géométrique peut donc se manifester, ou comme un rapport indiqué, ou comme un rapport trouvé; 15 — 3 n'est pas moins le rapport Arithmétique de 15 à 3 que la quantité $12 : \text{de même } \frac{15}{3}$ est une expression du rapport Géométrique de 15 à 3, aussi bien que le nombre 5; ainsi on pourra prendre l'une pour l'autre, suivant le besoin.

241. Dans la comparaison de deux grandeurs, on appelle *antécédent*, la grandeur que l'on compare; & celle à qui l'on compare, est appelée *conséquent*: si vous comparez 15 à 3, le nombre 15 est l'antécédent, & 3 est le conséquent.

Tout ce que nous allons dire des rapports, doit s'entendre des rapports Géométriques. Quand il fera question des rapports Arithmétiques, nous en avertirons.

On dit qu'un antécédent est *multiple* de son conséquent, lorsque l'antécédent contient plusieurs fois exactement son conséquent, qui est alors *sous-multiple* de l'antécédent. Par exemple, 20 est un multiple de 4, & 4 est sous-multiple de 20. Si l'antécédent du rapport ou d'une raison est double, triple, quadruple, &c. de son conséquent, on dit que le rapport, ou la raison de l'un à l'autre, est *double*, *triple*, &c. & qu'elle est *sous-double*, *sous-triple*, *sous-quadruple*, quand l'antécédent n'est que la moitié, le tiers, le quart, &c. de son conséquent.

242. Une *raison composée* est celle qui résulte de la multiplication de deux ou de plusieurs rapports; ainsi multipliant le rapport de 2 à 3 par celui de 5 à 7, ou multipliant $\frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$ (240) le produit $\frac{10}{21}$ est une raison composée des deux raisons $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$; d'où l'on voit que l'antécédent d'une raison composée est le produit des antécédens de toutes les raisons qui la composent, & que son conséquent est le produit de tous les conséquents.

Mais en particulier, une raison composée est dite *doublée, triplée, quadruplée* d'une autre raison, quand cette raison est composée de deux, de trois, de quatre raisons égales; ainsi le rapport $\frac{4}{3}$ est une raison doublée de la raison $\frac{2}{3}$: cela s'exprime ordinairement, en disant que $\frac{4}{3}$ est en raison doublée de $\frac{2}{3}$, parce que $\frac{4}{3}$ résulte du rapport $\frac{2}{3}$ multiplié par lui-même. Pareillement $\frac{b^3}{c^3}$ est l'expression du rapport triplé de b à la quantité c , ou de $\frac{b^3}{c^3}$, puisque

$$\frac{b}{c} \times \frac{b}{c} \times \frac{b}{c} = \frac{b^3}{c^3}.$$

N'allez pas confondre une raison doublée ou triplée avec une raison double ou triple: car (n°. 241.) une raison est double ou triple, quand son antécédent contient deux ou trois fois son conséquent; mais une raison doublée ou triplée est celle, qui résulte d'un rapport multiplié une ou deux fois par lui-même. Le rapport de 6 à 3 est une raison double, c'est-à-dire, que 6 est à 3 en raison double, parce que 6 contient deux fois 3; mais ce rapport n'est pas doublé: car il n'est pas le produit d'un rapport par lui-même. Pareillement $\frac{25}{9}$ est une raison doublée de 5 à 3 ou de $\frac{5}{3}$: car $\frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$; & ce n'est pas une raison double, puisque 25 ne contient pas seulement deux fois 9.

243. On juge qu'une raison est égale à une autre raison, lorsqu'en divisant chaque antécédent par son conséquent, on trouve un quotient égal de part & d'autre: ainsi le rapport de 12 à 4 est égal à celui de 15 à 5, parce que $\frac{12}{4} = 3$, aussi bien que $\frac{15}{5}$. On doit dire la même chose du rapport de $\frac{4}{6}$ à celui de $\frac{8}{12}$: ces deux rapports sont égaux, puisque l'un & l'autre se réduit à $\frac{2}{3}$. Ainsi, pour bien juger de l'égalité de deux ou de plusieurs rapports, il faut les exprimer sous la forme d'une fraction, & réduire

ensuite ces fractions à leur plus simple expression : par-là on voit tout à coup que les rapports de 3 à 9, de 6 à 18, de 2 à 6, &c. sont des rapports égaux, parce qu'en leur donnant la forme de fractions $\frac{1}{3}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{2}{6}$, & réduisant ces fractions à leur plus simple expression, on trouve $\frac{1}{3}$ pour chaque rapport.

On déterminera par le même moyen, lequel est le plus grand des deux rapports $\frac{6}{8}$ & $\frac{4}{12}$: car en les réduisant à leur plus simple expression $\frac{3}{4}$ & $\frac{1}{3}$, il est visible que le rapport de 6 à 8 exprimé par $\frac{3}{4}$, est plus grand que $\frac{1}{3}$, qui exprime le rapport de 4 à 12.

Quelquefois la plus simple expression de deux ou de plusieurs rapports ne montre pas tout d'un coup quel est le plus grand rapport : en ce cas, après les avoir transformés en fractions, on donnera à ces fractions une même dénomination : & la plus grande fraction, c'est-à-dire, le plus grand numérateur de ces fractions indiquera aussi le plus grand rapport. Vous ne voyez pas d'abord que la raison de 5 à 7 soit plus petite que celle de 3 à 4. Mettez ces rapports sous la forme de fractions, exprimez-les par $\frac{5}{7}$ & $\frac{3}{4}$: donnez à ces fractions la même dénomination ; vous aurez $\frac{20}{28}$ & $\frac{21}{28}$, où $\frac{20}{28}$ est l'expression de $\frac{5}{7}$, & $\frac{21}{28}$ est celle de $\frac{3}{4}$: ainsi comme $\frac{21}{28}$ est plus grand que $\frac{20}{28}$, il est nécessaire que $\frac{5}{7}$ soit plus petit que $\frac{3}{4}$, & par conséquent que le rapport de 3 à 4 soit plus grand que celui de 5 à 7, c'est-à-dire, que 3 contient un plus grand nombre des parties de 4, que 5 n'en contient des parties de 7. Pour abréger cette expression, on écrit $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$. Le signe $>$ veut dire *plus grand* ; & pour marquer *plus petit*, on tourne la pointe de l'autre sens : ainsi $\frac{5}{7} < \frac{3}{4}$ signifie que $\frac{5}{7}$ est plus petit que $\frac{3}{4}$, ou que la raison de 5 à 7 est plus petite que celle de 3 à 4.

Les nombres qui indiquent la plus simple ex-

pression des rapports, sont appelés les *expofans* de ces rapports : $\frac{6}{18}$ réduit à fa plus fimple expreffion, donnant $\frac{1}{3}$, les nombres 1, 3, font les expofans du rapport $\frac{1}{3}$.

DES PROPORTIONS.

244. Une proportion eft l'égalité de deux rapports. On l'appelle *Géométrique*, fi elle eft compofée de rapports Géométriques, & *Arithmétique*, quand ce font des rapports Arithmétiques qui la forment. Il n'eft queftion pour le préfent que des proportions Géométriques.

Puifqu'une proportion Géométrique eft une égalité de rapports Géométriques, cette proportion peut s'exprimer par une équation : ainfi le rapport de 2 à 6 étant égal à celui de 3 à 9, on peut écrire $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$; mais on l'exprime plus fouvent de cette manière, 2 . 6 :: 3 . 9 : ce qui veut dire, 2 eft à 6 comme 3 eft à 9; où l'on voit qu'un point entre deux termes fignifie *eft à*, & que les quatre points en quarré fignifient *comme*.

Puifqu'une proportion eft compofée de deux rapports qui ont chacun un antécédent, une proportion renferme deux antécédents & deux conféquents. Dans l'exemple propofé, 2 eft le premier antécédent, & 3 eft le fecond; 6 eft le premier conféquent, & 9 eft le fecond conféquent. Les deux termes 2, 9, qui font aux extrémités de la proportion, s'appellent enfemble les *Extrêmes* de la proportion, & les deux termes 6, 3, qui font dans le milieu, font appelés *Moyens*.

On dit qu'une proportion eft *continue*, quand les moyens font les mêmes, ou font des quantités égales; ainfi 8 . 4 :: 4, 2 eft une proportion continue : on exprime cette proportion par le figne

$\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$ que l'on met au-devant des termes de la proportion continue. On écrit donc $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$; ce qui signifie la même chose que $8 : 4 :: 4 : 2$. La grandeur 4 qui se trouve dans le milieu, est appelée *Moyenne proportionnelle* entre 8 & 2. Une proportion continue peut avoir plus de trois termes : rien n'empêche qu'elle ne s'étende à l'infini ; dans ce cas elle prend le nom de *progression* : ainsi $8 : 4 :: 4 : 2 :: 2 : 1 :: 1 : \frac{1}{2}$, &c. est une progression Géométrique, qui s'exprime plus simplement par $\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$, en mettant le signe $\frac{\quad}{\quad}$ au commencement de tous les termes, que l'on écrit à la suite les uns des autres, en les séparant par un point.

Théorème (a) fondamental & unique, dont on déduit toute la Théorie des proportions.

145. Dans une proportion Géométrique, le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens.

D É M O N S T R A T I O N.

Prenez la proportion numérique $3 : 9 :: 2 : 6$; il est évident que $3 \times 6 = 9 \times 2$: car l'on a 18 de part & d'autre ; mais pourquoi cela ? Faites attention que 3 n'est que le tiers de 9 ; ainsi multipliant 3 par 6, vous ne devez avoir que le tiers de 9 qui seroit multiplié par 6 : or, au lieu de multiplier 9 par 6, vous ne le multipliez que par le tiers de 6, ou par 2 ; le produit de 9 par 2 n'est donc que le tiers du produit de 9 par 6 : ce produit est par conséquent égal à celui de 3 par 6, qui est aussi le tiers de 9×6 ; il est donc clair pourquoi dans ce

(a) *Théorème*, c'est une Proposition où il s'agit de démontrer une vérité découverte.

cas particulier le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Mais cela ne suffit pas ; il le faut démontrer généralement. Les quantités algébriques étant des grandeurs indéterminées, ce que l'on démontre par leur moyen est démontré dans tous les cas imaginables.

Soit donc $a.b :: c.d$, l'expression d'une proportion Géométrique quelconque. Il faut démontrer que le produit des extrêmes $ad = bc$, le produit des moyens.

Puisqu'une proportion est l'égalité de deux rapports, on aura $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$: or deux grandeurs égales multipliées par une même grandeur donnent des produits égaux ; multiplions donc l'un & l'autre membre de cette équation par le produit bd des dénominateurs : nous aurons $\frac{abd}{b} = \frac{bcd}{d}$ ou, en effaçant ce qui se détruit, $ad = bc$; C. Q. F. D.

Ce n'est pas sans une bonne raison que je multiplie les deux membres de l'équation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, par le produit bd des conséquents ou des dénominateurs ; c'est que l'on ne peut faire évanouir des fractions, qu'en multipliant par les quantités qui servent de diviseurs ; & comme je sçais par la conclusion du Théorème, qu'il faut que j'arrive à cette équation $ad = bc$, qui est totalement délivrée de fractions, on voit pourquoi, ayant transformé la proportion en cette égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, j'en multiplie l'un & l'autre membre par le produit bd des dénominateurs.

246. Réciproquement, si le produit de deux grandeurs quelconques est égal au produit de deux autres grandeurs, on pourra toujours former une proportion de ces quatre grandeurs.

DÉMONSTRATION.

Prenons l'équation $3 \times 8 = 6 \times 4$. On voit que l'on en peut former la proportion $3.6::4.8$; ce qui n'est qu'une démonstration particulière : elle deviendra générale, en faisant voir qu'ayant $b\ c = d\ s$, on en peut déduire $b.d::s.c$, ou $\frac{b}{d} = \frac{s}{c}$.

Par la supposition, $b\ c = d\ s$; donc $\frac{b\ c}{c\ d} = \frac{d\ s}{c\ d}$: car des grandeurs égales, divisées par une même grandeur, donnent des quotients égaux; ainsi ôtant ce qui se détruit de l'équation $\frac{b\ c}{c\ d} = \frac{d\ s}{c\ d}$, elle devient $\frac{b}{d} = \frac{s}{c}$, ou $b.d::s.c$; C. Q. F. D.

On peut & on doit demander ce qui me détermine à diviser par $c\ d$ les deux membres de l'équation $b\ c = d\ s$. C'est la conclusion du Théorème qui me guide : de ce que $b\ c = d\ s$, je dois trouver $\frac{b}{d} = \frac{s}{c}$; c'est-à-dire que c doit s'évanouir du premier membre, & d en devenir le diviseur : or c'est ce qui arrive en divisant par $d\ c$.

Ces remarques méritent que l'on y fasse attention; c'est en quoi consiste l'esprit de l'Analyse.

Le Théorème que nous venons de démontrer avec sa converse, est d'un avantage merveilleux pour la formation des équations : car dès que vous aurez une proportion, vous en pourrez faire une équation, & réciproquement une équation vous servira à construire des proportions; c'est pourquoi comme les termes d'une proportion peuvent se combiner entr'eux & avec d'autres grandeurs de bien des manières, vous discernerez toujours les cas où il y aura proportion, & ceux où la proportion n'aura plus lieu.

COROLLAIRE I.

247. Si l'on connoît trois termes d'une proportion Géométrique, $a . b :: c . x$, le terme inconnu x sera toujours facile à connoître : on fera $ax = bc$; donc $x = \frac{bc}{a}$: c'est-à-dire, que pour connoître la quatrième proportionnelle à trois grandeurs, il faut multiplier la seconde par la troisième, & diviser le produit par la première; le quotient de cette division fera la quatrième proportionnelle.

Généralement, en quelqu'endroit de la proportion que l'inconnue se trouve, on la déterminera toujours, en divisant le produit où elle se trouve par la grandeur qui multiplie cette inconnue : supposez que $c . y :: d . b$, vous aurez $dy = bc$; donc $y = \frac{bc}{d}$.

On a fait un grand usage de cette propriété pour démontrer la Règle de trois. 5 hommes, dit on, font en un jour 50 toises d'un ouvrage; combien 12 hommes en feront-ils à proportion? Soit appelée x la quantité cherchée : il est clair que les effets doivent être proportionnés à leur cause; ainsi la question proposée se réduit à cette proportion, $5 . 50 :: 12 . x$; donc $\frac{50 \times 12}{5} = x = \frac{10 \times 12}{1} = 10 \times 12 = 120$. Par conséquent 12 hommes feroient 120 toises par jour, en supposant que 5 en fissent 50.

En employant la converse du Théorème fondamental, de quelque manière que la Règle de trois soit proposée, elle ne cause aucun embarras. Par exemple, 50 hommes enfermés dans un Château doivent consommer pendant 30 jours une certaine quantité de vivres; en combien de jours 70 hommes feront-ils la même consommation? Il est cer-

rain que l'on ne peut pas disposer comme il faut les termes de cette question, en écrivant : 50 hommes . 30 jours :: 70 hommes . x : cela signifieroit, puisque 50 hommes emploient 30 jours, 70 hommes emploieront plus de 30 jours ; ce qui est très-faux. Car 70 hommes auront plutôt consommé une même quantité de vivres que 50 hommes.

Pour éviter l'embarras de la disposition des termes, faites une équation : appelez p la quantité des vivres, & x le nombre de jours cherché ; dites donc : 50 hommes en 30 jours, c'est 30 fois 50 Rarions, qui égalent p en consommation ; ainsi $30 \times 50 = p$, ou $1500 = p$.

De même 70 fois le nombre de jours cherché, est aussi égal à p , puisqu'il doit y avoir même consommation de part & d'autre ; on a donc cette autre équation $70 \times x = p$: or deux grandeurs égales à une troisième, sont égales entr'elles ; donc $1500 = 70 \times x$. Ainsi $x = \frac{1500}{70}$, ou $\frac{150}{7} = 21 + \frac{2}{7}$; c'est-à-dire, que 70 hommes feront en 21 jours & $\frac{2}{7}$ de jour la même consommation, que feroient 50 hommes en 30 jours.

L'équation $30 \times 50 = 70 \times x$, fait voir la disposition suivant laquelle les termes doivent être rangés, si on veut les ordonner en proportion : car (n° 246.) $50 . 70 :: x . 30$. Ainsi comme 50 est plus petit que 70, le nombre x des jours que l'on cherche, doit être aussi plus petit que 30. En effet, 70 hommes doivent employer moins de tems que 50 à faire une même consommation de vivres : c'est pourquoi les Arithméticiens appellent ordinairement cette proportion une *proportion inverse*, parce que dans la proportion directe le nombre des jours est proportionné à celui des hommes ; & dans l'inverse il y a d'autant moins de jours, qu'il

ya plus d'hommes. Quand on a reconnu par le bon sens qu'une proportion est inversée, si on veut en ordonner les termes, on mettra le troisième terme à la quatrième place, & le terme inconnu x à la troisième.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette Règle, parceque nous l'avons démontrée d'une manière plus naturelle, lorsque nous avons expliqué la Règle de trois dans notre Traité d'Arithmétique.

COROLLAIRE II.

248. Dans la proportion continue, le produit des extrêmes est égal au carré de la moyenne. Soit la proportion continue $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$; c'est un fait que $2 \times 8 = 4 \times 4$. Mais en général, si l'on a la proportion continue $a.b :: b.x$, on en déduira que $ax = b^2$, puisqu'une proportion Géométrique donne toujours le produit des extrêmes égal à celui des moyens.

PROBLÈME.

249. Trouver une moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs a, b .

RÉSOLUTION.

Soit la moyenne proportionnelle inconnue appelée y . On aura cette proportion $a.y :: y.b$. Donc $ab = yy$. Ainsi $y = \sqrt{ab}$, c'est-à-dire, que la racine carrée du produit des deux grandeurs données, est la moyenne proportionnelle cherchée; ce qui n'est pas toujours possible en nombres: on chercheroit inutilement une moyenne proportionnelle exacte entre 3 & 7; car $3 \times 7 = 21$, & la racine carrée de 21 n'est pas déterminable à la rigueur; on peut seulement en approcher à l'infini.

COROLLAIRE III.

250. Vous avez beau changer la place des termes d'une proportion $a.b::c.d$, la proportion subsistera (*), pourvu que les deux mêmes termes qui sont extrêmes, soient toujours ou moyens ou extrêmes. Je dis donc, qu'ayant la proportion

$$a.b::c.d$$

$$\text{ou } 2.4::3.6$$

on ne détruira point la proportion en faisant les changemens suivans.

1°. En renversant $b.a::d.c$

$$4.2::6.3$$

2°. En alternant $a.c::b.d$

$$2.3::4.6$$

3°. . . $d.c::b.a$

$$6.3::4.2$$

4°. . . $d.b::c.a$

$$6.4::3.2$$

5°. . . $c.a::d.b$

$$3.2::6.4$$

6°. . . $c.d::a.b$

$$3.6::2.4$$

7°. . . $b.d::a.c$

$$4.6::2.3.$$

D É M O N S T R A T I O N.

Il est certain qu'il y aura une proportion dans tous ces cas, si le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens (n°. 246.) : or pour peu que l'on ouvre les yeux sur tous ces changemens, on apperçoit que ce sont toujours les mêmes

(*) On ne veut pas dire ici que la même proportion subsistera ; mais qu'il y aura toujours une proportion géométrique quelconque.

grandeurs qui se multiplient; donc puisque dans le premier cas le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, à cause que l'on suppose une proportion, il arrivera la même chose dans tous les autres cas; il y aura donc proportion. Ce qu'il falloit démontrer.

Si l'on a bien compris que le produit des extrêmes est toujours égal au produit des moyens, & que l'on peut toujours former une proportion dès que l'on a le produit de deux quantités égal au produit de deux autres quantités, il n'y a point de Commencant, qui ne puisse déterminer dans quelles circonstances quatre grandeurs proportionnelles resteront en proportion, soit que l'on ajoute, que l'on retranche, que l'on multiplie, que l'on divise, que l'on élève à des degrés, ou que l'on extraie les racines des grandeurs qui sont en proportion; puisqu'en prouvant l'égalité du produit des extrêmes avec celui des moyens, on aura un caractère infail-
 • le de l'existence de la proportion, comme on va le voir.

COROLLAIRE IV.

251. Dans une proportion Géométrique $a . b :: c . d$; ajoutez aux antécédents, ou retranchez-en ce que vous voudrez, pourvu que les grandeurs ajoutées ou retranchées soient en même rapport que les antécédents, il y aura toujours proportion; dites la même chose des conséquents. Mais plus simplement : si ce que l'on ajoute ou que l'on retranche, n'empêche pas que le produit des extrêmes ne soit égal à celui des moyens, la proportion subsistera; ainsi vous pouvez faire les additions ou les soustractions suivantes, sans détruire la proportion.

Soit la proportion $a . b :: c . d$
 $12 . 3 :: 8 . 2$

Donc en *composant*, ou plutôt en ajoutant,

$$a + b . b :: c + d . d$$

$$15 . 3 :: 10 . 2$$

$$a + b . a :: c + d . c$$

$$15 . 12 :: 10 . 8$$

$$a + c . c :: b + d . d$$

$$20 . 8 :: 5 . 2$$

$$a + c . a :: b + d . b$$

$$20 . 12 :: 5 . 3$$

Car prenez laquelle vous voudrez de ces différentes dispositions, par exemple, $a + c . a :: b + d . b$: faites le produit des extrêmes, qui est $ab + bc$, & celui des moyens $ab + ad$; il y a égalité entre ces deux produits, c'est-à-dire, que $ab + bc = ab + ad$: il est évident, 1°. que $ab = ab$; 2°. que $bc = ad$, puisque la proportion donnée $a . b :: c . d$ produit $bc = ad$. Donc $ab + bc = ab + ad$. Ainsi le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, c'est une nécessité qu'il y ait proportion.

De même, supposez que $a . b :: c . d$, vous aurez en *soustrayant*,

$$a - b . b :: c - d . d$$

$$a - b . a :: c - d . c$$

$$b - a . a :: d - c . c$$

$$b - a . b :: d - c . d$$

$$a - c . c :: b - d . d$$

$$a - c . a :: b - d . b$$

$$c - a . a :: d - b . b$$

$$c - a . c :: d - b . d$$

Vous n'avez qu'à prendre une de ces dispositions, telle que $a - b . b :: c - d . d$; vous trouverez toujours que le produit des extrêmes $ad - bd = bc - bd$ le produit des moyens : car premièrement $-bd = -bd$. En second lieu, $ad = bc$, puisque

puisque l'hypothèse est $a . b :: c . d$; ainsi $ad = bc$.
Donc $ad - bd = bc - bd$.

Il n'y a rien au monde de si aisé que ces démonstrations, quand on en tient le principe; c'est pourquoi on ne doit pas s'effrayer de cette multitude de changemens, dont les termes d'une proportion sont susceptibles: il n'est pas même nécessaire que l'on se rompe la tête à les retenir toutes; il suffit que l'on acquière l'habitude de les trouver au besoin: d'ailleurs, en substituant des nombres à la place des lettres, on voit tout d'un coup s'il y a proportion ou non.

COROLLAIRE V.

252. Si l'on multiplie ou si l'on divise les antécédens d'une proportion par une même grandeur m , la proportion subsistera: on ne la détruira pas non plus en multipliant ou en divisant ses conséquens par une même grandeur s .

Soit donc $a . b :: c . d$. Je dis que

$$1^{\circ}. am . b :: cm . d$$

$$2^{\circ}. \frac{a}{m} . b :: \frac{c}{m} . d$$

$$3^{\circ}. a . bs :: c . ds$$

$$4^{\circ}. a . \frac{b}{s} :: c . \frac{d}{s}$$

DÉMONSTRATION.

On n'a qu'à faire le produit des extrêmes, & voir s'il est égal à celui des moyens.

Par la supposition $a . b :: c . d$. Donc $ad = bc$; donc $adm = bcm$: c'est ce que l'on tire du premier cas. Donc $\frac{ad}{m} = \frac{bc}{m}$: c'est le produit du second cas. Donc $ads = bcs$: résultat du troisième

cas. Donc $\frac{a d}{f} = \frac{b c}{s}$: c'est ce que l'on déduit du quatrième cas ; par conséquent le cinquième Corollaire est démontré en toutes les parties.

C O R O L L A I R E V I.

253. Soient les deux Proportions,

$$\begin{array}{l} a . b :: c . d \\ f . g :: m . s. \end{array}$$

Je dis qu'en multipliant ou en divisant par ordre chaque antécédent par chaque antécédent, & chaque conséquent par chaque conséquent correspondant, il y aura encore proportion, c'est à-dire, que $a f . b g :: c m . d s$, ou que $\frac{a}{f} . \frac{b}{g} :: \frac{c}{m} . \frac{d}{s}$.

D É M O N S T R A T I O N.

Cela sera vrai, si l'on démontre dans les deux cas, que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Il faut donc prouver, 1°. que $a d f s = b c g m$; 2°. que $\frac{a d}{f s} = \frac{b c}{g m}$.

Par la supposition $a . b :: c . d$. Donc $a d = b c$.

On a aussi (supp.) $f . g :: m . s$. Donc $f s = g m$.

Par conséquent $a d \times f s = b c \times g m$, ou $\frac{a d}{f s} = \frac{b c}{g m}$; parce que des grandeurs égales, multipliées ou divisées par des grandeurs égales, restent toujours égales ; C. Q. F. D.

Quand il y auroit plus de deux proportions, le Corollaire seroit toujours vrai.

254. On voit par-là que les quarrés, les cubes, les quatrième puissances, &c. des termes proportionnels sont aussi en proportion, c'est à-dire, qu'ayant $a . b :: c . d$, on aura $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$, ou $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$; puisque la proportion $a^2 . b^2$

ET DES PROPORTIONS. 115

$1 : c^2 . d^2$, peut venir des deux proportions égales $a . b :: c . d$ multipliées par ordre, & cette multiplication donneroit $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$; mais on peut démontrer indépendamment du Corollaire précédent, que $a^2 . b^2 :: c^2 . d^2$, ou que $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, en supposant la proportion $a . b :: c . d$: car on en tire $a d = b c$. Donc $a^3 d^3 = b^3 c^3$, en quarrant l'un & l'autre membre; par conséquent $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$.

De même en élevant au cube les deux membres de l'équation $a d = b c$, on aura $a^3 d^3 = b^3 c^3$, ou $a^3 \times d^3 = b^3 \times c^3$; donc $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$; C. Q. F. D.

Il est évident, par la même raison, que des grandeurs en proportion ont aussi leurs racines de même degré en proportion, c'est-à-dire, que si $a^3 . b^3 :: c^3 . d^3$, on en pourra déduire la proportion $a . b :: c . d$. Car (supp.) $a^3 d^3 = b^3 c^3$; donc, extrayant la racine cubique de l'un & de l'autre membre, on trouve $a d = b c$, ou $a . b :: c . d$.

Nous ferons usage de ces vérités, lorsque nous traiterons des lignes proportionnelles; ainsi, quoique leur démonstration soit extrêmement facile, on doit les considérer autant qu'il est nécessaire, pour se les graver dans la mémoire.

COROLLAIRE VII.

255. Deux proportions $a . b :: c . d$, & $f . g :: m . s$, dont les rapports de l'une sont égaux aux rapports de l'autre, donneront encore une proportion, si l'on ajoute par ordre les antécédents aux antécédents, & les conséquents aux conséquents, ou si l'on retranche ces mêmes grandeurs par ordre. Soient

$$f . g :: m . s ::$$

$$12 . 4 :: 18 . 6 ;$$

donc les deux proportions $a . b :: c . d ::$

$$9 . 3 :: 6 . 2 .$$

Je dis que l'on peut en déduire, en ajoutant par ordre :

1°. La proportion $a + f . b + g :: c + m . d + s$.

$$21 . 7 :: 24 . 8 .$$

2°. En soustrayant aussi par ordre, on en tirera cette autre proportion $f - a . g - b :: m - c . s - d$

$$3 . 1 :: 12 . 4 .$$

D É M O N S T R A T I O N .

Cela est évident par les proportions exprimées numériquement ; mais on le démontrera généralement, en faisant voir que le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. Prenons d'abord la proportion $a + f . b + g :: c + m . d + s$ supposée, & montrons qu'elle est réelle. On fera le produit des extrêmes & celui des moyens. Il y aura d'une part $ad + as + fd + fs$, & de l'autre $bc + bm + cg + gm$; il faut donc prouver que $ad + as + fd + fs = bc + bm + cg + gm$; mais on a, par la supposition, $f . g :: m . s :: a . b :: c . d$;

Donc

$$ad = bc$$

$$as = bm$$

$$fd = cg$$

$$fs = gm .$$

Donc $ad + as + fd + fs = bc + bm + cg + gm$.

Le produit des extrêmes est donc égal à celui des moyens ; & par conséquent il y a proportion.

La seconde partie se prouvera comme la première ; mais remarquez bien, qu'afin que l'op

puisse ajouter ou soustraire par ordre les termes de deux proportions sans détruire la proportion, il est nécessaire que les rapports dont l'une est composée, soient égaux aux rapports de l'autre.

Car, en prenant les deux proportions $2. 4 :: 3. 6$
 $5. 15 :: 4. 12$

qui ne sont pas composées de rapports égaux, si l'on ajoutoit par ordre leurs antécédents & leurs conséquents, il n'en résulteroit pas une nouvelle proportion; puisque les quatre termes $2 + 5$, $4 + 15$, $3 + 4$, $6 + 12$, ne sont pas proportionnels, c'est-à-dire, que 7 n'est pas à 19, comme 7 est à 18.

COROLLAIRE VIII.

256. Dans une proportion continue $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, le carré du premier terme est au carré du second, comme le premier est au troisième, c'est-à-dire, $a^2 . b^2 :: a . c$.

DÉMONSTRATION.

Par la supposition $a . b :: b . c$. Donc $ac = b^2$; ainsi multipliant l'un & l'autre membre de cette équation par la même grandeur a , on aura $a^2 c = ab^2$, ou $a^2 \times c = b^2 \times a$; d'où l'on tire $a^2 . b^2 :: a . c$; C. Q. F. D.

COROLLAIRE IX.

257. Si la proportion continue a quatre termes, & que l'on ait $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$, je dis que le cube de la première est au cube de la seconde, comme la première est à la quatrième, c'est-à-dire que $a^3 . b^3 :: a . d$.

DÉMONSTRATION.

1°. De ce que $a.b :: b.c$, on déduit (n°. 256.) $a^2.b^2 :: a.c$, ou $a^2.c = a.b^2$. 2°. Puisque $a.b :: b.c :: c.d$; donc $a.b :: c.d$: ainsi $a.d = b.c$. Multipliant les membres de la première équation par ceux de la seconde, le premier membre par le premier membre, & le second par le second, il en résultera l'équation $a^3.c.d = a.b^3.c$, dont l'un & l'autre membre divisé par c , produit $a^3.d = a.b^3$, ou $a^3 \times d = b^3 \times a$; donc $a^3.b^3 :: a.d$ (n°. 246.); C. Q. F. D.

Généralement, quel que soit le nombre des quantités qui sont en proportion continue, en donnant pour Exposans aux deux premiers termes de la proportion ce même nombre diminué de l'unité, les deux premiers termes ainsi affectés seront en eux comme le premier est au dernier. S'il y a, par exemple, neuf quantités en proportion continue, dont la première soit a , la seconde b , & la dernière r , on aura $a^8.b^8 :: a.r$. S'il y en avoit 17, on diroit $a^{16}.b^{16} :: a.r$, &c. On fera usage de cette observation.

COROLLAIRE X.

258. Lorsque l'on a une suite de raisons égales, telle que $a.b :: c.d :: f.g :: m.n$, &c. la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent. Il s'agit donc de prouver que $a + c + f + m.b + d + g + n :: a.b$.

DÉMONSTRATION.

En faisant voir que le produit des extrêmes est

égal à celui des moyens, on aura démontré qu'il y a proportion. Le produit des extrêmes est $ab + bc + bf + bm$; & celui des moyens est $ab + ad + ag + an$. Il s'agit donc de prouver que $ab + bc + bf + bm = ab + ad + ag + an$.

1°. $ab = ab$.

2°. $bc = ad$; puisque (supp.) $a.b :: c.d$.

3°. $bf = ag$; car (supp.) $a.b :: f.g$.

4°. $bm = an$; parce que (supp.) $a.b :: m.n$. Donc $ab + bc + bf + bm = ab + ad + ag + an$;
C. Q. F. D.

Exprimez en nombres une suite de raisons égales; prenez la suite $2.6 :: 3.9 :: 1.3 :: 4.12$, &c. & vous verrez sur le champ que la somme des antécédents $2 + 3 + 1 + 4$, ou 10, est à la somme des conséquents $6 + 9 + 3 + 12$, ou 30, comme 2 est à 6, c'est-à-dire, que $10.30 :: 2.6$; ce qui faute aux yeux.

Nous ne pousserons pas plus loin nos recherches sur les différens changemens que peuvent recevoir les termes d'une proportion, sans cesser d'être proportionnels; un plus grand détail appartient à un Traité complet de calcul: nous n'avons dû considérer ici les proportions que relativement à la Géométrie qui va suivre. Cependant on fait en certaines rencontres un si grand usage des progressions Arithmétiques comparées aux progressions Géométriques, que nous ne devons pas laisser ignorer aux Commensans l'avantage que l'on retire de cette comparaison.

De la Proportion Arithmétique.

259. On appelle proportion Arithmétique l'égalité de deux rapports Arithmétiques. Cette pro-

portion se marque à-peu-près comme une proportion Géométrique ; toute la différence est que l'on ne met que deux points entre les deux rapports de la proportion Arithmétique : ainsi $5 . 2 : 10 . 7$, est l'expression d'une proportion Arithmétique ; cela signifie que 5 surpasse 2, comme 10 surpasse 7. Or on trouve l'excès d'une grandeur sur une autre, en ôtant la plus petite de la plus grande ; on pourra par conséquent exprimer les deux rapports d'une proportion Arithmétique par une soustraction indiquée. La proportion Arithmétique $5 . 2 : 10 . 7$, pourra donc recevoir la forme d'une équation, &c par conséquent devenir $5 - 2 = 10 - 7$, ou généralement, si $a . b$ arithmétiquement comme $c . d$, on écrira $a . b : c . d$, ou $a - b = c - d$.

THÉORÈME II.

260. Dans une proportion Arithmétique

$$a . b : c . d$$

$$12 . 9 : 18 . 15$$

la somme des extrêmes $a + d$, est toujours égale à la somme des moyens $b + c$.

DÉMONSTRATION.

Prenez la proportion Arithmétique $12 . 9 : 18 . 15$. Il est évident que $12 + 15$ somme des extrêmes, est égale à $9 + 18$, qui est la somme des moyens.

Mais en général il faut prouver que, si l'on a la proportion Arithmétique $a . b : c . d$, il en résultera $a + d = b + c$. Or c'est ce qui arrive : car (supp.) $a - b = c - d$; donc, en transposant b & d avec des signes contraires, on trouve $a + d = b$

+ c , c'est-à-dire, que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.

Réciproquement, si $a + d = b + c$, je dis que $a . b$ arithmétiquement : $c . d$: car, puisque $a + d = b + c$, on aura, en transposant, $a - b = c - d$, ou $a . b : c . d$.

PROBLÈME.

261. Trois termes, 5, 9, 14, d'une proportion Arithmétique étant donnés, trouver le quatrième que j'appelle x .

RÉSOLUTION.

Dites : 5 . 9 : 14 . x ; donc $5 + x = 14 + 9 = 23$ (n°. 260.) : ainsi $x = 23 - 5 = 18$. Effectivement 5 est surpassé par 9, comme 14 l'est par 18. Et généralement, ayant la proportion $a . b : c . x$, on aura $a + x = b + c$. Donc $x = b + c - a$; c'est-à-dire, que l'on trouve un quatrième proportionnel Arithmétique, en soustrayant le premier terme de la somme des moyens.

COROLLAIRE.

262. Dans une proportion continue Arithmétique $a . b : b . c$, la somme des extrêmes est
 7 . 12 : 12 . 17
 égale au double de la moyenne.

DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que $a + c = 2b$. Or, puisque la proportion est Arithmétique, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens (n°. 260.) ; donc $a + c = b + b$ ou $2b$; C. Q. F. D.

Mais cela est encore plus sensible dans la proportion continue Arithmétique $7 : 12 : 12 : 17$; car $7 + 17 = 12 + 12$, ou $= 24$ double de 12, moyen proportionnel.

PROBLÈME.

263. Trouver un moyen proportionnel Arithmétique entre 13 & 8.

RÉSOLUTION.

Faites $13 : x : x : 8$. Donc $2x = 21$; par conséquent $x = \frac{21}{2} = 10\frac{1}{2}$, le moyen proportionnel cherché. En effet $13 : 10\frac{1}{2} : 10\frac{1}{2} : 8$; car la somme des extrêmes $13 + 8$, ou $21 = 10\frac{1}{2} + 10\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, 21.

Et généralement, pour trouver un moyen proportionnel Arithmétique x entre a & b , on fera $a : x : x : b$. Donc $a + b = 2x$: ainsi $x = \frac{a+b}{2}$. C'est-à-dire, que la moyenne proportionnelle Arithmétique entre deux grandeurs est égale à la moitié de la somme des extrêmes.

DES LOGARITHMES.

264. Comme une progression Géométrique est une suite de rapports Géométriques égaux, une progression Arithmétique est aussi une suite de rapports Arithmétiques égaux que l'on exprime ainsi $\div 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$, &c. ce qui signifie que 2 est à 4 arithmétiquement, comme 4 est à 6, comme 6 est à 8, &c. En formant une progression Géométrique, on s'est aperçu qu'il en naissoit une progression Arithmétique. Avec les deux termes 1, b , faites une progression Géométrique, vous

aurez $1.b :: b.\frac{b}{1}$; ainsi b^2 sera le troisième terme de votre progression : continuez en disant $b.b^2 :: b^2.\frac{b^2}{b} = b^3$; par conséquent b^3 sera le quatrième terme de la progression. Vous trouverez de même que b^4 en seroit le cinquième, b^5 le sixième, & ainsi de suite à l'infini; par conséquent la progression Géométrique, dont les deux premiers termes sont $1, b$, sera $\frac{1}{b} . 1 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6$, &c. en augmentant toujours d'un degré : où il est aisé de remarquer que, tandis que les termes de cette suite sont en progression Géométrique, les Exposans de ces termes forment la progression Arithmétique $\frac{1}{b} . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6$: or l'on a appelé *Logarithmes*, les termes d'une progression Arithmétique, qui répondent à ceux d'une progression Géométrique. Comme dans la progression $\frac{1}{b} . 1 . b^1 . b^2 . b^3$, &c. l'unité n'a point de terme Arithmétique correspondant, on lui supposera 0, afin que chaque terme de la progression Géométrique réponde à son Logarithme; on écrira donc les deux progressions l'une sous l'autre de cette manière :

$$\begin{array}{r} \frac{1}{b} . 1 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4 . b^5 . b^6 . \text{ \&c.} \\ \frac{1}{b} . 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . \end{array} \quad \text{Voici}$$

les observations que l'on a faites sur ces deux progressions ainsi comparées.

1°. Le Logarithme d'un produit est toujours égal à la somme des Logarithmes des quantités qui ont concouru à former ce produit. Prenez b^1 , qui est le produit de b^2 par b^1 , les Logarithmes de b^2 & b^1 sont 2 & 3, dont la somme est 5, qui vaut réellement le Logarithme 5 du produit b^3 .

2°. Le Logarithme du quotient de deux grandeurs divisées l'une par l'autre, est égal à la diffé-

rence des Logarithmes de ces grandeurs. Divisez b^5 par b^4 : vous aurez le quotient b^1 , dont le Logarithme est 2 ; & ce Logarithme 2 est égal à la différence $6 - 4$ des Logarithmes des grandeurs b^6 , b^4 .

3°. Le Logarithme d'une grandeur n'est que la moitié du Logarithme de son quarré ; c'est une suite de ce que nous avons dit : mais prenez la grandeur b^3 , quarréz-la ; elle sera b^6 : or 3 Logarithme de b^3 , n'est que la moitié de 6 Logarithme de b^6 .

4°. Le Logarithme d'un nombre n'est que le tiers du Logarithme de son cube. Car b^6 est le cube de b^2 , le Logarithme de b^6 est 6, & celui de b^2 est 2, qui n'est que le tiers du Logarithme 6.

165. On voit bien que cela est, me dira-t-on ; le fait est amplement prouvé : l'important est de savoir comme cela arrive.

Pour le démontrer, prenons deux progressions numériques

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . 128 . \\ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . \end{array}$$

où l'on voit que le Logarithme de 1 est 0, celui de 2 est 1, celui de 4 est 2, celui de 32 est 5, &c. Dans la Démonstration suivante, un nombre précédé de la lettre l , fera l'expression du Logarithme de ce nombre. Ainsi $l\ 3$ signifiera le Loga-

rithme de 3 ; $l\ 8 \times 4$, ou $l\ 32$, signifiera le Logarithme de 32, &c.

Cela supposé, il s'agit de démontrer que le Logarithme d'un produit tel que 4×8 , est égal à la somme des Logarithmes des racines 4, 8 ; c'est-

à dire, que $l\ 4 \times 8 = l\ 4 + l\ 8$.

D É M O N S T R A T I O N .

Puisque $4 \times 8 = 32 \times 1$, on aura la pro-

ET DES PROPORTIONS. 125

portion Géométrique $1.4::8.32$, dont les Logarithmes doivent former une proportion Arithmétique; ainsi $l1.l4:l8.l32$. Mais (260.) dans une proportion Arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens; donc $l1 + l32 = l4 + l18$. Or (supp.) $l1 = 0$; donc $l32 =$

$l4 + l18 = l4 \times 8$; c'est-à-dire, que le Logarithme du produit de 4 par 8 est égal à la somme des Logarithmes des racines 4, 8 de ce produit. Ce qu'il falloit démontrer.

On prouvera de même que le Logarithme du quotient 16 des deux nombres 64 & 4, est égal à la différence qu'il y a entre les Logarithmes de ces nombres; c'est-à-dire, que $l16 = l64 - l4$. Car, par la supposition, $\frac{64}{4} = 16$. Donc (en multipliant par 4) $64 \times 1 = 16 \times 4$; ainsi $1.4::16.64$; & par conséquent $l1.l4:l16.l64$; donc (n°. 260.) $l1 + l64 = l4 + l16$. Or (supp.) $l1 = 0$; par conséquent $l64 = l4 + l16$. Donc enfin $l64 - l4 = l16$.

Il ne sera pas plus difficile de prouver que le Logarithme d'un nombre n'est que la moitié du Logarithme de son carré. Prenez 8, quarrez-le, vous aurez 64; il faut donc prouver que $l8 = \frac{l64}{2}$.

D É M O N S T R A T I O N.

Par la supposition, $8 \times 8 = 64 \times 1$. Donc $1.8::8.64$. Ainsi $l1.l8:l8.l64$. Donc (n°. 260.) $l1 + l64 = l8 + l18 = 2l8$. Or $l1 = 0$. Donc $l64 = 2l8$. Et par conséquent, en divisant l'un & l'autre membre par 2, on aura $\frac{l64}{2} = l8$; C.Q.F.D.

On déduira facilement de cette dernière Démonst-

mière x des deux moyennes proportionnelles est égale à une grandeur connue, puisqu'il ne s'agit plus que d'extraire la Racine cubique de la quantité aab , que l'on suppose donnée par la nature de la

question; faisant donc $\sqrt[3]{aab} = c$: afin de cal-

culer avec plus de facilité, je substitue c à la place de x dans la progression $a.x::x.y::y.b$, & elle se change en cette autre $a.c::c.y::y.b$, où il ne s'agit plus que de trouver une moyenne proportionnelle entre c & b ; ce qui ne souffre aucune difficulté après la découverte de la première,

puisque $a.c::c.\frac{c}{a}::\frac{c}{a}.b$, où l'on voit que $\frac{c}{a}$ est la seconde moyenne proportionnelle; parce

que quand on a trois termes d'une proportion, on doit multiplier le second par le troisième, en diviser le produit par le premier, & le quotient de cette division est le quatrième proportionnel (n^o. 247.).

On pourroit trouver la première x des moyennes proportionnelles x, y , sans faire deux équations; il n'y a qu'à se rappeler, que dans une proportion continue de quatre termes, le cube de la première est au cube de la seconde, comme la première est à la quatrième (257.); on aura donc $a^3.x^3::a.b$, d'où l'on déduit $a^3b = ax^3$, & divisant par a , l'équation devient $a^2b = x^3$; par conséquent $x = \sqrt[3]{a^2b}$, comme ci-dessus.

Comme on fait usage de ce Problème en Géométrie, il n'est pas hors de propos de le résoudre numériquement. On demande deux moyennes proportionnelles entre 3 & 24. Prenez la formule

formule $x = \sqrt[3]{a^2 b}$, qui est l'expression de la première moyenne proportionnelle entre a & b . Cette expression nous avertit qu'il faut extraire la Racine cubique du-quarré a^2 du premier terme a multiplié par le quatrième b . Par conséquent élevons 3 à son quarré 9; multiplions ce quarré par 24 : le produit sera 216, dont la Racine cubique 6 est la première des deux moyennes proportionnelles entre 3 & 24; après cela la seconde est aisée à trouver : car 3 . 6 : 6 . 12 :: 12 . 24; ainsi 6 & 12 sont les deux moyennes proportionnelles cherchées.

Si vous ne voulez pas vous servir de la formule

$x = \sqrt[3]{a^2 b}$, dites (n°. 257.) : le cube de 3 est au cube de x comme le premier terme 3 est au quatrième 24. Donc $27 \cdot x^3 :: 3 \cdot 24$, ou $3 \cdot 24 :: 27 : x^3$; ainsi $x^3 = \frac{24 \times 3}{27} = 8 \times 27 = 216$

Donc $x = \sqrt[3]{216} = 6$, ainsi que nous l'avons trouvé par la formule.

268. Il y a quelques Règles de Changes étrangers assez difficiles, mais dont la Résolution devient fort aisée avec le secours des Proportions.

PROBLÈME.

Si 100 liv. de Venise pèsent 70 liv. de Lyon;
120 liv. de Lyon 100 liv. de Rouen,
80 liv. de Rouen 100 liv. de Toulouse;
100 liv. de Toulouse 74 liv. de Genève;
Combien 100 liv. de Venise font-elles de liv. pesant de Genève?

Tome II.

DES RAPPORTS R É S O L U T I O N .

Soit la livre pesant de Venise $\equiv V$
 Celle de Lyon L
 Celle de Rouen R
 Celle de Toulouse T
 Et celle de Genève G

Par les conditions du Problème vous aurez les équations suivantes : $100 V \equiv 70 L$. $120 L \equiv 100 R$. $80 R \equiv 100 T$. $100 T \equiv 74 G$; d'où vous déduirez ces quatre Proportions :

$$\begin{aligned} V . L &:: 70 . 100. \\ L . R &:: 100 . 120. \\ R . T &:: 100 . 80. \\ T . G &:: 100 . 74. \end{aligned}$$

Donc en multipliant par ordre tous les antécédents par les antécédents, & les conséquents par les conséquents (n°. 253.), vous aurez cette unique proportion, $V \times L \times R \times T . L \times R \times T \times G :: 70 \times 100 \times 100 \times 74 . 100 \times 120 \times 80 \times 100$; d'où l'on tire l'équation suivante :

$$\frac{V \times L \times R \times T}{L \times R \times T \times G} = \frac{70 \times 100 \times 100 \times 74}{100 \times 120 \times 80 \times 100}$$

qui se réduisent à $\frac{V}{G} = \frac{70 \times 74}{120 \times 80}$, en effaçant ce qui

$$\text{se détruit ; ou encore } \frac{V}{G} = \frac{7 \times 74}{12 \times 80} = \frac{7 \times 37}{6 \times 80}$$

$\equiv \frac{259}{480}$. Ainsi $V . G :: 259 . 480$; ce qui signifie que la livre pesant de Venise est à la livre pesant de Genève, comme 259 est à 480; ou que la livre pesant de Venise n'est que les $\frac{259}{480}$ parties de la livre pesant de Genève. Faites maintenant ce raisonnement : si une livre de Venise est réduite à $\frac{259}{480}$ de la livre de Genève, à combien

ET DES PROPORTIONS. 131

200 livres de Venise seront-elles réduites? Vous aurez donc cette proportion, $1 . \frac{259}{480} :: 100 . x$, ou $480 . 259 :: 100 . x$ (en multipliant les deux premiers termes par 480 pour faire évanouir la fraction) (n°. 252.); ainsi $\frac{259 \times 100}{480} = x =$

$\frac{259 \times 10}{48} = \frac{259 \times 5}{24} = 53 \text{ liv. } + \frac{23}{24}$, c'est-à-dire, que 100 liv. de Venise ne valent pas tout-à-fait 54 liv. de Genève; il s'en faut $\frac{1}{24}$.

J'ai détaillé la Résolution de ce Problème, afin que l'on ait un modèle bien raisonné, applicable à toutes les questions semblables.

PROBLÈME

Semblable au précédent.

1 écu de France vaut	80.	den. de Hol.
415. den. de Hollande	240.	den. d'Anglet.
240. den. d'Angleterre	420.	den. de Hamb.
64. den. de Hambourg	1.	florin de Francf.

Combien 166 écus de France valent-ils de florins de Francfort?

RÉSOLUTION.

Appellons la monnoie de France	F
Celle de Hollande	H
Celle d'Angleterre	A
Celle de Hambourg	h
Celle de Francfort	f

On aura par les conditions du Problème :

F , H :: 80 . 1
H . A :: 240 . 415
A . h :: 420 . 240
h . f :: 1 . 64.

Donc en multipliant par ordre; on aura l'équa-

$$\text{tion} \quad \frac{F \times H \times A \times h}{H \times A \times h \times f} = \frac{80 \times 240 \times 420}{415 \times 240 \times 64},$$

$$\text{ou } \frac{F}{f} = \frac{80 \times 420}{415 \times 64} = \frac{8 \times 10 \times 105 \times 4}{415 \times 8 \times 4 \times 2}$$

$= \frac{1050}{830} = \frac{105}{83}$. Ainsi $F : f :: 105 : 83$; c'est-à-dire que l'écu de France est au florin de Francfort, comme 105 est à 83; par conséquent 83 écus de France valent 105 florins de Francfort. Dites présentement si 83 écus de France valent 105 florins de Francfort, combien 166 écus de France vaudront-ils de florins de Francfort? Cela donne cette proportion $83 : 105 :: 166 : x$; en divisant le produit des moyens 105×166 par le premier terme 83, on trouvera $x = 210$; c'est-à-dire; que 166 écus de France valent 210 florins de Francfort.

De ce que $F : f :: 105 : 83$, j'ai conclu que 83 écus de France valoient 105 florins de Francfort; en voici la preuve. Faites le produit des extrêmes & celui des moyens; vous aurez $F \times 83 = 105 \times f$, ou $F = \frac{105 f}{83}$, ce qui signifie que 1 écu de France vaut $\frac{105}{83}$ de florins de Francfort; donc 83 fois un écu de France $= 83$ fois $\frac{105}{83}$ de Francfort, c'est-à dire, que 83 écus de France $= 105$ florins de Francfort; C. Q. F. D. (a).

Quand on a résolu un Problème, il est facile de donner les règles de sa Résolution; il n'y a qu'à

(a) Remarquez qu'il n'est pas besoin d'ajouter une Démonstration à la Résolution des Problèmes que nous proposons ici. Chaque partie de la Résolution se démontrant à mesure qu'elle avance, il est clair qu'il n'y a plus rien à démontrer, quand on est arrivé à une solution entière: c'est pour cela que la méthode des Mathématiciens est si propre à étendre l'intelligence; il faut qu'elle soit continuellement en exercice, par l'obligation où est l'esprit à chaque pas qu'il fait, de se rendre compte de ses démarches.

revenir sur ce que l'on a fait pour le résoudre, développer la règle contenue dans le dernier résultat & l'énoncer.

Si les Inventeurs de certaines Règles d'Arithmétique nous disoient le chemin qu'ils ont tenu lorsqu'ils les ont découvertes, ils délivreroient les Lecteurs, qui font usage de leur raison, de l'embarras où ils sont très-souvent de concevoir comment on a pû découvrir des Règles quelquefois très compliquées, auxquelles l'état de la question ne paroît point devoir conduire. L'Algèbre ou l'Analyse révèle tous ces mystères; elle montre tous les degrés par où l'on a passé, & que les Inventeurs ont supprimés, pour ne produire que le dernier résultat d'où ils ont déduit la Règle, comme je le ferai voir particulièrement, en examinant la Résolution du Problème suivant, qui n'est pas moins utile que curieux.

Une pièce d'Artillerie, telle qu'un canon qui n'est plus en état de servir, ne laisse pas d'être de quelque utilité. La matière en est bonne à refondre; on peut en faire de nouvelles pièces. Celles dont il est ici question, sont composées de *Rosette*, appelée communément *Cuivre rouge*, & d'*Étain* fin d'Angleterre. De l'alliage de ces deux métaux il en résulte un métal que l'on appelle *Fonte*. On conçoit bien que les métaux qui composent la fonte, doivent avoir entr'eux une certaine proportion. Chaque fondeur a la sienne; mais ceux qui se sont rendus les plus attentifs à l'expérience, suivent la proportion de 100 à 12, c'est-à-dire, que sur 100 livres de rosette, ils mettent 12 livres d'étain; & l'on trouve que le métal qui en résulte, n'est ni trop aigre ni trop doux: une autre proportion le rend ou trop cassant ou trop mou.

Ainsi, comme l'on peut ignorer, quand on

fond des pièces d'artillerie, la proportion dont on a fait usage dans leur première fonte, il s'agit de la découvrir.

L'expérience prouve qu'un corps plongé dans l'eau perd quelque chose de sa pesanteur (a). Les Physiciens ont déterminé la quantité de cette perte; elle varie, suivant la différente pesanteur des corps, sous un même volume, c'est-à-dire, de même grosseur : on a observé que *la rosette perd dans l'eau la neuvième partie de son poids, & que l'étain fin en perd la septième partie.* Nous allons faire usage de ce principe, pour déterminer la quantité de rosette, & celle d'étain, qui composent la fonte dont la proportion de l'alliage est inconnue.

P R O B L Ê M E.

269. Un morceau de fonte, ou bien un tron-

(a) *L'expérience prouve qu'un corps plongé dans l'eau perd quelque chose de sa pesanteur.* Il est certain que les parties supérieures de l'eau sont soutenues par les inférieures, & que celles-ci le sont par le fond du vaisseau qui les contient, puisque ces parties de l'eau posent immédiatement les unes sur les autres.

Ainsi, quand on plonge dans l'eau un corps solide, ce corps chasse l'eau, il prend la place d'un volume d'eau égal au sien : or ce volume d'eau chassé étoit soutenu par les parties qui l'avoisinoient; donc le corps solide, qui en prend la place, sera aussi soutenu par les mêmes parties : ce solide, que je suppose plus pesant qu'un pareil volume d'eau, étant soutenu, pèsera donc moins qu'il ne pesoit lorsqu'il n'étoit pas soutenu, ainsi que l'expérience nous l'apprend.

Je dis plus. La perte de la pesanteur du corps solide plongé dans l'eau, doit être précisément égale au poids du volume d'eau dont le solide occupe la place : car supposons que le volume d'eau, dont le solide occupe la place, pèse une livre; les parties d'eau qui l'avoisinoient, soutenoient donc une livre pesant, ou, ce qui est la même chose, faisoient l'effort d'une livre contre ce volume d'eau, & l'empêchoient de descendre. Par conséquent le solide mis en la place du volume d'eau, souffrira le même effort de la part des mêmes parties qui l'environnent : cet effort est d'une livre; le corps solide trouve donc la résistance d'une livre à vaincre en descendant dans l'eau, & par conséquent il est nécessaire qu'il perde une livre de sa pesanteur, puisqu'on lui résiste en sens contraire avec une livre.

La perte que fait un solide plongé dans l'eau, est donc égale au poids du volume d'eau dont ce solide occupe la place; d'où l'on voit que l'on peut connoître le poids d'un volume d'eau quelconque, sans qu'il soit besoin de peser l'eau immédiatement.

con d'une pièce d'artillerie étant donné, trouver la quantité de rosette & d'étain, qui en fait l'alliage.

R É S O L U T I O N.

Pesez bien exactement dans l'air le tronçon proposé. Supposons que son poids soit de 80 livres, vous le peserez ensuite dans l'eau, c'est-à-dire, qu'en le pesant il sera plongé dans l'eau, tandis que le poids qui fera équilibre avec lui, sera en l'air; remarquez combien il perd de sa pesanteur. Qu'il en perde, par exemple, 9 livres & $\frac{1}{3} = \frac{28}{3}$.

Après ces observations, appelez R la quantité de rosette qui est dans le tronçon. Nommez aussi E la quantité d'étain qui est entré dans la composition de ce même morceau, & reprenez l'état de la question, c'est-à-dire, rappelez-vous les conditions du Problème. La première est que le tronçon pèse 80 livres en plein air; les deux portions de rosette & d'étain, dont il est composé, pèsent donc ensemble 80 livres : ainsi l'on a cette équation $R + E = 80$.

La seconde condition consiste en ce que les deux quantités de rosette & d'étain, réunies en une seule masse, perdent dans l'eau $\frac{28}{3}$ de leur pesanteur totale. Or, par le principe d'expérience des métaux pesés dans l'eau, la rosette perd la neuvième partie de son poids; sa perte est donc $\frac{R}{9}$; & l'étain en perd sa septième partie : ainsi on doit exprimer sa perte par $\frac{E}{7}$. Ces deux pertes ensemble valent la perte totale $\frac{28}{3}$ de la masse entière; par conséquent il vient cette autre équation, $\frac{R}{9} + \frac{E}{7} = \frac{28}{3}$; & toutes les conditions du Problème sont exprimées.

Tâchons présentement de dégager les grandeurs inconnues R, E, afin de les rendre égales à des

quantités connues. Commençons par faire évanouir les fractions de l'équation $\frac{R}{9} + \frac{E}{7} = \frac{28}{3}$, en multipliant l'un & l'autre membre par 9×7 , ce qui produira $7 R + 9 E = \frac{9 \times 7 \times 28}{3} = \frac{3 \times 3 \times 7 \times 28}{3} = 3 \times 7 \times 28 = 21 \times 28 = 588$; ainsi $7 R + 9 E = 588$.

Et si nous revenons à la première équation $R + E = 80$, en transposant E , nous aurons $R = 80 - E$: donc $7 \times R = 7 \times 80 - 7 E$; c'est-à-dire, $7 R = 560 - 7 E$. En la place de $7 R$ mettons sa valeur $560 - 7 E$ dans l'équation $7 R + 9 E = 588$, il nous viendra $560 - 7 E + 9 E = 588$, ou $560 + 2 E = 588$; & en transposant 560 , cette équation deviendra $2 E = 588 - 560 = 28$: or, puisque $2 E = 28$, on aura donc $E = 14$; c'est à-dire, qu'il y a 14 livres d'étain dans le tronçon proposé, & par conséquent 66 livres de rosette, puisque ces deux quantités font ensemble 80 livres: c'est la première condition du Problème; & que la septième partie de $14 = 2$, jointe à la neuvième partie de $66 = 7 + \frac{2}{9}$ ou $\frac{1}{3}$, produit 9 livres & $\frac{1}{3}$, qui est la perte totale du tronçon, suivant la seconde condition du Problème.

Sur 66 livres de rosette, il y a donc 14 livres d'étain dans le morceau de fonte proposé; c'est beaucoup trop; puisqu'il ne faut que 12 livres d'étain sur 100 livres de rosette. Par conséquent, afin que cet alliage devienne conforme aux expériences les plus reçues, on y ajoutera la quantité de rosette nécessaire pour qu'elle ait avec l'étain la proportion de 100 à 12. Ainsi l'on fera ce raisonnement: *Puisque 12 livres d'étain exigent 100 livres de rosette, combien 14 livres d'étain demandent-elles de*

rosette ? Cette question se résout par une Règle de Trois, qui donne 116 livres & $\frac{2}{3}$ de rosette pour 14 livres d'étain : il y a déjà dans la fonte en question 66 livres de rosette ; c'est par conséquent 50 livres & $\frac{2}{3}$ de rosette qu'il faut y ajouter, afin que la rosette & l'étain, qui composent cette fonte, soient dans la proportion la plus reçue.

Mais ce Problème n'est résolu que pour un cas particulier. Rendons la résolution générale. Soit la pesanteur de la fonte proposée $= f$, sa perte dans l'eau $= p$. Soit aussi $= x$ la quantité inconnue de rosette qui en compose l'alliage, b la perte d'une quantité de rosette égale en pesanteur au morceau de fonte. Appellons aussi y la quantité inconnue d'étain, c la perte d'une quantité d'étain égale en pesanteur au morceau de fonte.

1°. Puisque les deux quantités inconnues de rosette & d'étain, mises ensemble, composent le morceau de fonte, on aura cette équation, $x + y = f$.

2°. Pour trouver l'expression de la perte de chaque quantité inconnue, supposons d'abord un morceau de pure rosette égal en pesanteur au tronçon de fonte ; la perte de la quantité inconnue de rosette doit être proportionnée à la perte d'un morceau de pure rosette égal en pesanteur au tronçon de fonte : ainsi l'on a cette proportion ; le morceau de pure rosette égal en pesanteur au tronçon de fonte est à sa perte b dans l'eau, comme la quantité inconnue x de rosette est aussi à sa perte dans l'eau, ou plus simplement $f. b :: x. \frac{bx}{f}$, qui est l'expression de la perte que fait dans l'eau la quantité inconnue de rosette.

En suivant cette même méthode, c'est-à-dire, en considérant un morceau de pur étain égal en pesanteur au tronçon de fonte, on fera cette au-

tre proportion : le morceau de pur étain égal en pesanteur au tronçon de fonte f , est à sa perte c dans l'eau, comme la quantité inconnue y d'étain est à sa perte dans l'eau, ou $f.c::y.\frac{c}{f}$, où l'on voit que $\frac{c}{f}$ est l'expression de la perte que fait dans l'eau la quantité inconnue d'étain : or les deux pertes des deux quantités inconnues sont égales à la perte totale p ; par conséquent on a encore cette autre équation, $\frac{bx}{f} + \frac{cy}{f} = p$, & le Problème est mis en équation : il ne reste plus qu'à dégager les inconnues.

Reprenons la première équation, $x + y = f$; donc, en transposant, $x = f - y$; &, en faisant évanouir les fractions de l'équation, $\frac{bx}{f} + \frac{cy}{f} = p$, nous aurons $bx + cy = fp$; donc, en substituant dans cette dernière équation, en la place de x , sa valeur $f - y$, on aura $bf - by + cy = fp$: ainsi, en transposant, $cy - by = fp - bf$, ou $c - b \times y = p - b \times f$, d'où l'on tire cette proportion, $c - b.p - b::f.y$; cela signifie que l'on aura la quantité d'étain qui est dans la fonte, en cherchant une quatrième proportionnelle aux trois termes connus $c - b, p - b, f$.

Car c est la perte que fait dans l'eau une masse d'étain égale en pesanteur au tronçon de fonte $= 80$ livres; & l'on sçait par l'expérience que l'étain perd dans l'eau la septième partie de son poids: ainsi sa perte $c = \frac{20}{7}$. Par le même principe d'expérience, la perte b d'une masse de rosette pesant 80 liv. est la neuvième partie de son poids; d'où il suit que $b = \frac{80}{9}$: de plus (par la supp.) la perte p du tronçon de fonte est $\frac{28}{3}$ de livre; ainsi $p = \frac{28}{3}$, & le poids de la fonte $f = 80$ livres. Si l'on substitue donc en la place des lettres c, b, p, f , leur

valeur correspondante $\frac{80}{7}$, $\frac{80}{9}$, $\frac{18}{3}$, 80, dans la proportion $c — b . p — b :: f . y$, elle se changera en celle-ci, $\frac{80}{7} — \frac{80}{9} . \frac{18}{3} — \frac{18}{9} :: 80 . y$, où les trois premiers termes sont exprimés en chiffres : il n'y a donc qu'à multiplier les deux termes moyens $\frac{18}{3} — \frac{80}{9}$, 80, l'un par l'autre, & diviser le produit $\frac{120}{9}$ par le premier terme $\frac{80}{7} — \frac{80}{9}$ $= \frac{160}{7 \times 9}$ (en donnant à ces deux fractions la même dénomination), & l'on aura $\frac{120}{9} \times \frac{160}{7 \times 9} = \frac{3 \times 10 \times 7 \times 9}{9 \times 16 \times 10} = \frac{3 \times 7}{16} = \frac{2 \times 16 \times 7}{16} = 2 \times 7 = 14$; comme ci-dessus, pour la quantité d'étain y dont est composé le morceau de fonte.

Si nous n'avions pas voulu voir les degrés qui nous ont conduits à la résolution de ce Problème, voici la règle que nous aurions pû donner, afin que l'on trouve dans tous les cas possibles la quantité d'étain ou de rosette, qui composent l'alliage du tronçon proposé. Pour déterminer, par exemple, la quantité d'étain, faites cette Règle de Trois : *La perte que fait dans l'eau une masse d'étain égale en pesanteur au tronçon de fonte, moins la perte que fait dans l'eau une masse de rosette égale aussi en pesanteur au tronçon de fonte, est à la perte que fait dans l'eau le tronçon de fonte, moins la perte que fait dans l'eau la masse de rosette égale en pesanteur au tronçon de fonte, comme la pesanteur du tronçon de fonte est à un quatrième terme qui donnera la quantité d'étain cherchée* : car c'est ce que signifie la dernière proportion, $c — b . p — b :: f . y$, où nous sommes parvenus en dernier ressort, en comparant par ordres différens rapports des quantités données (a).

(a) Ce Problème est célèbre sous le nom de la Couronne de Hiéron. L'occasion qui l'a fait naître, mérite d'être rapportée. Hiéron, Roi de Syracuse, ordonna à un Orfèvre de lui faire une Couronne d'or. Le

N'oublions pas d'observer que l'on ne pourroit résoudre ce Problème que par une sorte de hazard,

Prince fournit la quantité de matière qui devoit y entrer. Mais Hiéron, fort content de l'ouvrage, le fut très peu de l'ouvrier, dont la probité ne lui parut pas sans reproche. Quoique, expérience faite, la Couronne fût trouvée poids pour poids de l'or qui avoit été fourni, il soupçonna l'alliage d'un métal étranger.

Cependant, en cas que l'Orfèvre eût falsifié la matière, il n'étoit pas aisé de l'en convaincre; le Roi ne vouloit pas que l'on détruisît la Couronne, elle étoit de son goût. La question fit du bruit. On la proposa à tous les Mathématiciens de ce tems-la; elle se réduisoit à déterminer, *sans endommager en rien l'ouvrage de la Couronne, la quantité de matière différente de l'or que l'on auroit pu y mêler.*

Archimède, parent & ami de Hiéron, dut être un des premiers qui en eût connoissance; mais on ne sçauroit guères douter que les Géomètres de Syracuse, & même tous ceux de la Grèce, n'aient travaillé de toutes leurs forces à la Résolution d'un Problème si singulier. Une question aussi nouvelle & aussi difficile devoit être un appât pour cette espèce d'hommes qui ne sont amoureux que des difficultés.

Néanmoins il est vraisemblable que la Résolution de ce Problème se fit attendre assez long-tems. Il n'en parut qu'une seule, & même depuis environ deux mille ans, on n'en a point vu d'autre, elle étoit d'Archimède. Apparemment cette question l'avoit extrêmement tourmenté; elle le poursuivoit partout; ce fut au bain que les principes de sa résolution, ou, comme s'expriment les Géomètres, les données de ce Problème se présentèrent à son esprit. Il s'aperçût qu'étant dans l'eau, son corps perdoit de son poids; réfléchissant tout à-coup sur cette idée, il entrevit la résolution de son Problème. L'imagination allumée, & comme transporté de l'esprit de sa découverte, il se jette hors du bain, court tout nud par les rues de Syracuse en criant, *je l'ai trouvé*, & se rend chez lui pour mettre sur le papier les idées qui l'agitoient, ou pour s'assurer de la vérité de ses présumptions, qui se trouvoient effectivement conformes à ce qu'il en espéroit.

Voici donc comment Archimède s'y prit, pour prouver que la matière de la Couronne avoit été altérée. Il prit une masse d'or pur, égale en pesanteur à celle de la Couronne; ces deux masses étant pesées en plein air, il les pesa dans l'eau, où elles ne conservèrent plus d'équilibre: d'où il conclut d'abord, selon le principe d'expérience rapporté ci-dessus que la matière de la Couronne étoit falsifiée.

Mais pour en venir à une solution parfaite, c'est-à-dire, pour déterminer la quantité de matière étrangère que l'Orfèvre avoit pu mêler avec l'or, s'étant douté que ce pouvoit n'être que de l'argent; il prit encore une masse de pur argent de même poids que la Couronne, & comparant ensemble les pertes que faisoient dans l'eau ces trois différentes matières de même poids, il parvint à découvrir, comme nous avons fait, la quantité de l'argent mêlé avec l'or; ce qui fut confirmé par l'aveu de l'Orfèvre, aveu, dont on n'avoit pourtant pas absolument besoin, si ce n'est pour attester qu'il n'y avoit d'autre alliage que de l'argent: car, en supposant que l'on eût mêlé avec l'or deux autres métaux, comme de l'argent & du cuivre, le Problème auroit été indéterminé, ainsi que nous le démontrons à l'article qui suit la résolution générale, que nous avons donnée du Problème auquel appartient cette Note.

ET DES PROPORTIONS. 141

si l'on ignoreit l'espèce & le nombre des métaux

On voit par-là qu'Archimède étoit en possession de se démêler des questions les plus épineuses des Mathématiques. Le Problème de la Couronne d'Hiéron étoit très difficile : il fallut qu'Archimède se créât, pour ainsi dire, des données. Sa résolution ne dépend point d'une méthode nouvelle, d'une Géométrie, d'un calcul particulier, inventés par d'autres, & connus d'un petit nombre de Géomètres : elle est purement de génie.

De la manière dont le Problème fut proposé par Hiéron, il n'y avoit de donnée que le poids de la Couronne. Archimède eut à découvrir, 1°. Que les métaux perdoient de leur poids dans l'eau. 2°. Qu'ils en perdoient selon la différence pesanteur des métaux sous le même volume. 3°. Il fallut qu'il s'avisât de comparer les pertes des deux masses, l'une d'or pur, & l'autre de l'argent pur de même poids que la Couronne. Tout cela étoit entièrement neuf de son temps. Les Géomètres ses Contemporains en font une preuve évidente : ils ne produisirent rien d'approchant de sa découverte sur ce sujet ; il fut le seul, & deux mille ans qui se sont écoulés depuis, ne lui ont pas donné un seul concurrent.

Je ne sais si les loix de l'hydrostatique, c'est-à-dire, de la science qui enseigne le rapport de la pesanteur des différens fluides, & leur action contre les corps solides qui y sont plongés, je ne sais pas, dis-je, si les loix de cette science étoient découvertes avant Archimède ; mais il est sûr qu'il nous en a donné tout le fonds dans son *Traité De insidentibus humido* ; & peut-être est-ce à la Révolution du Problème proposé par Hiéron, que nous en sommes redevables. Si ce Traité eût existé, il me semble que la question du Roi de Syracuse ne l'eût pas tant embarrassé ; Archimède y eût trouvé la plus grande partie des données de son Problème.

Ceux qui disent que l'on résout aujourd'hui d'un trait de plume ce qui lui a tant coûté, comme le Problème de l'Analyse des métaux, me permettront de leur faire considérer, que l'on ne résout point véritablement ce qui est résolu depuis deux mille ans ; qu'Archimède est le seul qui ait résolu ce Problème ; & que c'est se faire une illusion bien étrange que de prétendre donner une résolution, quand on ne fait que la copier ou l'expliquer.

Je ne sçaurois donc approuver l'espèce de raillerie qu'un bel esprit a faite à ce sujet : *Les Géomètres d'aujourd'hui ne sont pas, dit-il, aisés à contenter sur les difficultés ; & ce qui a fait sortir Archimède du bain pour crier par les rues de Syracuse, JE L'AI TROUVÉ, ne seroit pas pour eux une découverte bien glorieuse.* Avec tout le respect dû au célèbre Panégyriste des Modernes, elle seroit très-glorieuse, même aujourd'hui ; c'est qu'elle est totalement indépendante des nouvelles méthodes : l'application de l'Algèbre à la Géométrie, le calcul différentiel & intégral n'y serviroient de rien ; sans un coup de génie on n'en viendrait pas à bout, & ces coups sont rares : le nombre des génies, qui ne doivent rien aux autres, est fort petit. Presque tous nos Modernes ont établi leur réputation, en faisant usage de découvertes qui ne leur appartenotent pas ; mais Archimède a élevé la sienne sur des fondemens dont il a été l'inventeur. Une nouvelle méthode dans les sciences est comme une nouvelle machine dans les arts : elle procure plus de commodités ; mais suppose-t-elle absolument plus de génie, ou plus de force réelle à ceux qui en font usage ?

qui composent un alliage dont il s'agit de faire l'analyse. L'Orfèvre, dont nous avons parlé dans la note (a), auroit très certainement mis en défaut le Roi & le Géomètre de Syracuse, en composant son alliage de trois ou quatre métaux; puisque, 1°. Il auroit fallu qu'Archimède eût deviné l'espèce des métaux, afin d'en comparer les différentes pertes dans l'eau. 2°. Qu'il en eût imaginé le nombre; & même, tout cela supposé, il ne lui auroit pas été possible de déterminer absolument la quantité précise de chaque matière: car, en reprenant notre Problème, supposons que le morceau de fonte soit composé de rosette, d'étain, & de fer $\equiv F$, qui perd dans l'eau la huitième partie de son poids; ces trois métaux réunis pèsent 80 livres (par la supp.): ainsi $R + E + F = 80$. Secondement, leur perte totale étant $\frac{23}{8}$, on aura cette autre équation, $\frac{R}{9} + \frac{E}{7} + \frac{F}{8} = \frac{23}{8}$; & ces deux équations expriment toutes les conditions du Problème.

Si l'on fait maintenant évanouir les fractions de la seconde équation, elle deviendra $56 R + 72 E + 63 F = 4704$; & de l'équation $R + E + F = 80$, on tire $R = 80 - E - F$; & multipliant l'un & l'autre membre de cette équation par 56, l'on a $56 R = 4480 - 56 E - 56 F$. Substituons présentement la valeur de 56 R dans l'équation $56 R + 72 E + 63 F = 4704$, elle deviendra $4480 - 56 E - 56 F + 72 E + 63 F = 4704$, d'où l'on a, en effaçant ce qui se détruit, $4480 + 16 E + 7 F = 4704$; & transposant 4480, l'équation devient $16 E + 7 F = 224$, où il y a encore les deux inconnues E, F, que l'on ne sauroit faire évanouir, parcequ'il n'y a rien dans la question qui détermine le rapport d'E à F ou à R, ni de F à R. Le Problème

est donc indéterminé, c'est à dire qu'il peut avoir différentes solutions.

Car supposons qu'il y ait 4 livres de Fer dans le morceau de fonte proposé, on aura $F = 4$. Donc $7 F = 28$. Ainsi l'équation $16 E + 7 F = 224$, deviendra $16 E + 28 = 224$; donc $16 E = 224 - 28 = 196$. Ainsi $E = \frac{196}{16} = 12 \frac{1}{4}$; ce qui signifie que dans ce cas il y a 12 livres & un quart d'étain, & par conséquent 63 livres & $\frac{3}{4}$ de rosette, puisque ces trois quantités réunies donnent 80 livres, & que la huitième partie de 4 livres, plus la neuvième partie de 63 livres & $\frac{3}{4}$, avec la septième partie de 12 livres $\frac{1}{4}$, produisent 9 livres & $\frac{1}{3}$ ou $\frac{28}{3}$, qui est la perte totale que font dans l'eau ces trois masses fondues en une seule.

Si l'on fait une autre supposition, on pourra trouver encore une autre solution. Soit la quantité de fer $F = 3$; donc $7 F = 21$: alors l'équation $16 E + 7 F = 224$, se changera en celle-ci, $16 E + 21 = 224$. Donc $16 E = 224 - 21 = 203$; d'où l'on tire $E = \frac{203}{16} = 12 + \frac{11}{16}$. En supposant donc qu'il y ait 3 livres de fer dans le morceau de fonte, on y trouvera 12 livres & $\frac{11}{16}$ d'étain, & par conséquent 64 livres $\frac{5}{16}$ de rosette; car l'addition de ces trois quantités donne 80 livres pour la première condition du Problème; & la huitième partie de 3 livres, plus la septième partie de 12 livres & $\frac{11}{16}$, avec la neuvième partie de 64 livres & $\frac{5}{16}$, donnent 9 livres & $\frac{1}{3}$ ou $\frac{28}{3}$, pour la seconde condition du Problème.

On pourroit faire un très grand nombre d'autres suppositions semblables qui produiroient le même effet, parcequ'en prenant un peu plus d'une espèce de métal, on en prendroit un peu moins d'une autre, ce qui se compenseroit: car, si l'on détermine l'une des trois quantités, l'équation indiquera toujours

combien il en faut prendre des deux autres.

Quoique l'on puisse faire un très-grand nombre de suppositions, qui toutes aboutissent au même résultat, il ne faut pas s'imaginer que le nombre en soit totalement arbitraire; il est renfermé entre certaines bornes qui sont déterminées par l'équation.

Reprenons donc l'équation $16 E + 7 F = 224$: je dis que l'on ne peut pas supposer que $F = 32$ livres, c'est-à-dire qu'il y ait 32 livres de fer dans le morceau de fonte proposé, puisque l'équation $16 E + 7 F = 224$ devenant alors $16 E + 7 \times 32 = 224$, se changeroit en celle-ci, $16 E + 224 = 224$, d'où l'on tire $16 E = 224 - 224 = 0$; ce qui signifie que seize fois la quantité d'étain est égale à rien, ou, pour parler plus naturellement, qu'il n'y a point d'étain dans l'alliage en question; ce qui est contre la supposition.

On ne peut donc pas supposer qu'il y ait jusqu'à 32 livres de fer; & c'est ce que l'on appelle *une limite* que l'on ne sauroit atteindre, ni même outrepasser, sans tomber dans une contradiction; mais on peut prendre à volonté tous les nombres qui sont au dessous, entiers ou fractionnaires; ils satisferont à la question.

J'avertirai encore que, si la fonte résulteroit de l'alliage de quatre métaux, le Problème seroit doublement indéterminé, & il le seroit triplement, s'il y en avoit cinq, &c. En un mot, on jugera qu'un Problème est indéterminé, lorsqu'il ne sera pas possible d'avoir autant d'équations qu'il y a d'inconnues. Pour peu que l'on veuille s'y rendre attentif, on en découvrira la raison; une plus ample discussion appartient à un Traité particulier des équations, où l'on est obligé d'épuiser la matière, autant que le permet le progrès de la science que l'on traite.

Il y a des mesures dans l'Arpentage qui portent le même nom, lesquelles sont néanmoins fort différentes. On a déjà dit que, pour les travaux Royaux, la perche contenoit 22 pieds, au lieu que la perche commune n'en a que 18. En mesurant un Terrain avec la perche Royale, on y trouvera moins d'arpens, que s'il avoit été mesuré avec la perche commune; mais aussi ces arpens seront plus grands. Dans les achats & les ventes des Terres, il faut toujours spécifier la perche, dont on a fait usage pour les évaluer. C'est alors que l'on a besoin assez souvent de transformer les arpens Royaux ou les perches Royales, en arpens communs ou en perches communes, & réciproquement les communes en Royales : car pour les toises, les pieds, les pouces, &c. il n'y a point de variation.

PROBLÈME.

On a trouvé qu'un Terrain, mesuré avec une perche de 22 pieds, contient 1 arpent, 70 perches, 0 toises, 30 pieds, 75 pouces carrés; si on l'avoit mesuré avec une toise de 18 pieds, combien auroit-on trouvé d'arpens, de perches, &c. ?

RÉSOLUTION.

1°. On commencera par chercher le rapport de l'arpent Royal $\equiv A$, à l'arpent commun $\equiv a$, en disant : puisque la perche Royale $\equiv 22$ pieds, cette perche carrée $\equiv 22 \times 22 \equiv 484$ pieds carrés : il y a 100 perches carrées dans l'arpent; ainsi l'arpent Royal $A \equiv 484 \times 100 \equiv 48400$ pieds carrés.

Présentement, la perche commune $\equiv 18$ pieds; donc la perche carrée commune $\equiv 324$ pieds

quarrés; & l'arpent commun $a = 32400$ pieds quarrés.

Par conséquent $A . a :: 48490 . 32400$; & (en divisant par 400, pour réduire à la plus simple expression) on trouve que $A . a :: 121 . 81$, ou que $81 A = 121 a$, c'est à dire que 81 arpens Royaux valent 121 arpens communs.

2°. Ce rapport une fois déterminé, on procédera à la Résolution entière du Problème, en observant d'abord que l'on ne doit faire attention qu'aux arpens & aux perches quarrées, tout le reste étant égal dans les deux mesures. Or 1 arpent & 70 perches $= \frac{170}{100}$ d'arpent (à cause qu'un arpent $= 100$ perches quarrées); par conséquent on doit dire; si 81 arpens Royaux produisent 121 arpens communs (ainsi qu'on l'a vû Art. 1.), combien $\frac{170}{100}$ d'arpent Royal produiront-elles d'arpens communs? C'est une Règle de Trois, où l'on sçait qu'il faut multiplier $\frac{170}{100}$ par 121, & en diviser le produit $\frac{20570}{100}$ par 81, pour avoir $\frac{20570}{8100} = 2$ arpens communs $+ \frac{4370}{8100}$ d'arpent. L'arpent $= 100$ perches quarrées; en multipliant donc la fraction précédente par 100, on aura $\frac{437000}{8100}$ de perche quarrée, lesquelles $= \frac{4370}{81} = 53$ perches quarrées $+ \frac{77}{81}$ de perche quarrée. Mais la perche quarrée $= 9$ toises quarrées; multipliant donc $\frac{77}{81}$ par 9, on aura $\frac{693}{81}$ de toise quarrée $= 8$ toises quarrées $+ \frac{45}{81}$ ou $\frac{5}{9}$ de toise quarrée, laquelle dernière fraction multipliée par 36 (parce qu'une toise quarrée $= 36$ pieds quarrés) produira $\frac{180}{9} = 20$ pieds quarrés.

De manière que 1 arpent Royal & 70 perches quarrées Royales $= 2$ arpens, 53 perches, 8 toises, 20 pieds de mesure commune; & en y joignant les 30 pieds & les 75 pouces négligés, on verra que 1 arpent, 70 perches, 30 pieds, 75 pouces Royaux, feront, en mesures communes,

2 arpens, 54 perches, 14 pieds & 75 pouces quarrés; C. Q. F. T. & D.

Pour se convaincre de la justesse de ce calcul, on renversera la question, en demandant ce que vaudroient 2 arpens, 54 perches, 14 pieds, & 75 pouces quarrés communs, si on les réduisoit à la perche Royale.

On mettra à part, comme ci-dessus, les 14 pieds & 75 pouces, qui ne font aucune difficulté, & l'on se rappellera que 1 arpent = 100 perches quarrées; qu'ainsi une perche quarrée = $\frac{1}{100}$ d'arpent: par conséquent 2 arpens & 54 perches = $2 + \frac{54}{100}$ d'arpent = $\frac{254}{100}$ d'arpent; après quoi on fera ce raisonnement: puisque (Art. 1.) 121 arpens communs se réduisent à 81 arpens Royaux, à combien d'arpens Royaux se réduiront $\frac{254}{100}$ d'arpent commun? En multipliant (selon la règle de trois) $\frac{254}{100}$ par 81, & divisant le produit $\frac{20574}{100}$ par 121, on aura pour le quotient $\frac{20574}{12100}$ d'arpent Royal, lesquelles = 1 arpent + $\frac{8474}{12100}$ d'arpent Royal. En multipliant cette fraction par 100 (parce que 1 arpent = 100 perches quarrées), elle deviendra = $\frac{847400}{12100}$ de perche quarrée = $\frac{8474}{121}$ = 70 perches quarrées + $\frac{4}{121}$ de perche quarrée, qu'il faut réduire en pieds quarrés. Or la perche quarrée Royale = 22 pieds x 22 pieds = 484 pieds quarrés; multipliant les $\frac{4}{121}$ de perche quarrée par 484, on aura $\frac{1936}{121}$ de pied quarré = 16 pieds quarrés: en sorte que 2 arpens, 54 perches communes = 1 arpent, 70 perches & 16 pieds quarrés Royaux. Que l'on y ajoute à présent les 14 pieds & 75 pouces quarrés qu'on a laissés là; on verra que 2 arpens 54 perches, 14 pieds, & 75 pouces, en mesure commune, se réduisent à 1 arpent, 70 perches, 30 pieds, & 75 pouces Royaux, ainsi qu'on devoit le retrouver; C. Q. F. P.

PROBLÈME.

270. Trouver la somme d'une progression Géométrique descendante d'un nombre de termes infini (a), tel que $\dots 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16}$, &c.

RÉSOLUTION.

Pour bien comprendre la résolution de ce Problème, exprimons-le algébriquement : supposons la progression $a . b :: b . c :: c . d :: d . g$, &c. dont il s'agit de trouver la somme s . Remarquez que la somme des antécédents est composée de tous les termes moins le dernier g ; & que la somme des conséquents est aussi composée de tous les termes moins le premier a : ainsi la somme des antécédents $= s - g$; celle des conséquents $= s - a$. Or il a été démontré (n°. 258.) qu'une suite de rapports ou une progression étant donnée, la somme des antécédents est à la somme des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent; donc $s - g . s - a :: a . b$: ainsi $b s - b g = a s - a a$; & comme l'on suppose $a > b$, à cause que la progression est descendante, on aura, en transposant, $a a - b g = a s - b s$: divisant l'un & l'autre membre par $a - b$, il vient $\frac{a a - b g}{a - b} = s$; cela signifie que la somme s de tous les termes d'une progression finie descendante, est égale au carré du premier terme, moins le produit du second par le dernier, le tout divisé par la différence du premier au second. Ainsi la somme de tous les termes de la progression finie $\dots 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16}$

(a) *L'infini*. Ce mot ne signifie pas une quantité existante : car il n'y a point d'infini dans la nature; il exprime simplement la propriété qu'ont les nombres ou toutes les grandeurs, de pouvoir croître ou diminuer sans fin.

$$= \frac{4 - 1 \times \frac{1}{16}}{2 - 1} = \frac{64 - 1}{16} = \frac{63}{16} = 3 + \frac{15}{16}. \text{ Ce que}$$

vous trouveriez encore, en faisant l'addition successive de tous les termes de la progression proposée : mais, outre que cette méthode ne résout que des cas particuliers, lorsque le nombre des termes de la progression est considérable, elle devient d'une longueur excessive, & même comme impossible, si l'on suppose que ce nombre croisse sans fin ; au lieu qu'avec l'équation formulaire $s = \frac{a^a - b^g}{a - b}$, on peut résoudre en un instant tous les cas possibles.

Car, en supposant le nombre des termes plus grand qu'aucune quantité imaginable, le dernier terme sera d'une petitesse si énoïme qu'il pourra être négligé, je ne dis pas seulement sans une erreur sensible, mais même sans une erreur assignable ; il n'y a donc aucun inconvénient à supposer $g = 0$: alors l'équation devient $s = \frac{a^a}{a - b}$ (a) ; elle exprime la somme de tous les termes d'une progression descendante, dont le nombre des termes croît sans fin ; par conséquent la somme de tous les termes de la progression infinie descendante $\therefore 2 . 1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \&c.$
 $= \frac{4}{2 - 1} = 4.$

(a) En supposant $g = 0$, l'équation $s = \frac{a^a - b^g}{a - b}$ devient $s = \frac{a^a}{a - b}$. On conviendra bien que g doit disparaître de l'équation ; mais l'on ne se borne pas à l'anéantissement de la quantité g ; on extermine tout le terme $- b^g$, qui est fort différent de la quantité g . Cela mérite effectivement d'être expliqué. Considérez donc que toute quantité qui multiplie zéro, ne peut donner que zéro ; ainsi 8 fois 0 = 0 ; donc aussi $- b \times 0 = 0$; & par conséquent g étant supposé = 0, on aura $- b \times g$ ou $- b^g = 0$: voilà pourquoi tout le terme $- b^g$ s'anéantit par la supposition de $g = 0$.

271. Il paroît assez surprenant que la somme de tous les termes d'une progression infinie soit très-souvent une quantité fort petite ; vous trouverez , par exemple , en vous servant de la formule $s =$

$\frac{a^a}{a-b}$, que la somme des termes de la progression infinie descendante $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{64}$, &c. $= 1$.

Cependant rien n'est plus clair , pour peu que l'on y fasse attention. Appliquons la progression à une quantité réelle , à l'étendue d'un pied ; prenons-en d'abord la moitié , ensuite la moitié du reste , c'est-à-dire , $\frac{1}{4}$; il ne reste plus que $\frac{1}{4}$: prenons la moitié de ce quart ou $\frac{1}{8}$; il reste $\frac{1}{8}$: prenons encore la moitié de ce huitième de pied , & ainsi de suite , en prenant toujours la moitié de ce qui reste ; il est clair que ce procédé n'épuisera jamais le second demi-pied tout entier , & qu'il en peut approcher à l'infini sans pouvoir le passer ; par conséquent toutes les parties réunies , c'est-à-dire , la somme de tous les termes de la progression n'excédera jamais 1 pied : elle en fera même toujours éloignée de quelque chose , mais d'une distance inassignable ; en sorte que 1 pied est plutôt la *limite* de cette progression qu'il n'en est la somme. Néanmoins dans une division infinie , la somme & la limite se confondent , à cause que la quantité dont elles diffèrent , est plus petite qu'aucune grandeur assignable.

C O R O L L A I R E.

272. Les deux premiers termes d'une progression infinie descendante étant donnés , on trouvera donc la somme de tous les termes de cette progression ; puisque , suivant la formule $s = \frac{a^a}{a-b}$, cette somme est égale au carré du premier terme divisé par la différence du premier au second.

Mais il n'en est pas de même d'une progression infinie ascendante, c'est-à-dire, dont les termes vont toujours en croissant; la somme de ces termes est inassignable, parce qu'elle n'a point de bornes: par exemple, il est impossible de trouver la somme de la progression $\frac{1}{2}$ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32, &c. qui croît sans fin, ou qui n'est renfermée dans aucunes limites.

Seulement, si le nombre de ses termes étoit déterminé, & que l'on en donnât le premier, le second & le dernier terme, on en trouveroit la somme, comme ci-dessus. Car, en reprenant l'équation $bs - bg = as - aa$ du n°. 269, le second terme b étant supposé plus grand que le premier terme a , on trouvera, en transposant, $bs - as = bg - aa$, & $s = \frac{bg - aa}{b - a}$; c'est-à-dire, que la somme de tous les termes d'une progression ascendante qui n'est pas infinie, est égale au produit du second terme par le dernier, moins le carré du premier terme, le tout divisé par la différence du second terme au premier. En appliquant cette formule à une progression numérique quelconque, on en trouvera la somme par la seule connoissance de ces trois termes, le premier, le second & le dernier.

R E M A R Q U E.

J'ai dit (n°. 269.) que le dernier terme d'une progression descendante, dont le nombre des termes croît sans fin, pouvoit être supposé $= 0$: c'est qu'en ce cas le dernier terme de cette progression est une fraction, dont le dénominateur est d'une grandeur énorme par rapport à son numérateur. Or, quand cela arrive, la quantité exprimée par cette fraction dispaeroit aux sens: par exemple, $\frac{1}{1000000000000}$ de pied, ou la cent billionième partie

d'un pied, n'est pas assignable en longueur ; à plus forte raison une partie désignée par une fraction incomparablement plus petite seroit-elle inassignable. Voilà pourquoi on la suppose égale au néant.

COROLLAIRE I. du n°. 272. Donc si d'une grandeur b on ôte la moitié, après cela la moitié de ce qui reste, & ainsi de suite sans fin, on parviendra à un reste plus petit qu'aucune grandeur donnée, ou à un reste que l'on pourra regarder comme 0. Car toutes les portions soustraites formeront une progression Géométrique infinie descendante ; dont le premier terme $= \frac{b}{2}$, & le second $= \frac{b}{4}$, étant connus, on trouvera (272.) que la somme de cette progression $= b$. Or b ôté de $b = 0$; donc, &c. Ce qu'il faut bien remarquer.

COROLLAIRE II. du n°. 272. La somme s d'une progression Géométrique infinie descendante en raison quadruple, c'est-à-dire, dont le premier terme est quadruple du second, le second quadruple du troisième, & ainsi de suite ; cette somme, dis je, est au premier terme a de la progression $:: 4. 3.$

Pour le démontrer, reprenons l'équation $s = \frac{a \cdot a}{a - b}$ du n°. 272. Et comme on suppose le second terme b de la progression égal au quart du premier terme a , on n'a qu'à mettre $\frac{a}{4}$, au lieu de b , dans l'équation $s = \frac{a \cdot a}{a - b}$; & l'on aura $s = \frac{a \cdot a}{a - \frac{a}{4}} = \frac{a \cdot a}{\frac{3a}{4}} = \frac{4 \cdot a \cdot a}{3 \cdot a} = \frac{4a}{3}$. Donc $s \times 3 = a \times 4$, ou $s : a :: 4. 3.$ Ce qu'il faut encore bien remarquer.

Quand la progression Géométrique est ascendante, on en peut déterminer aisément la somme s ,

sans la connoissance du dernier terme, pourvû que l'on en connoisse seulement le premier p , le nombre des termes n , & l'exposant e de la progression. On entend par l'*exposant* d'une progression, le nombre qui exprime combien de fois l'antécédent est contenu dans le conséquent du rapport qui règne dans la progression. Si l'on a, par exemple, la progression Géométrique $\frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 18 \cdot 54$, &c. le rapport de deux termes consécutifs étant toujours le même, par la nature de la progression, celui de la proposée est exprimée par la raison de 2 à 6; en divisant donc 6 par 2, on a 3 pour l'*exposant* de la progression.

Ainsi quel que soit le second terme x d'une progression Géométrique ascendante, dont le premier terme est p , son exposant $e = \frac{x}{p}$; donc le second terme $x = p e$, & la progression ascendante devient $p \cdot p e :: p e \cdot \frac{p^2 e^2}{p} = p e^2$ pour son troisième terme; en continuant, on aura $p e \cdot p e^2 :: p e^2 \cdot \frac{p^3 e^4}{p e} = p e^3$ qui en fera le quatrième. Si l'on poursuit en faisant $p e^2 \cdot p e^3 :: p e^3 \cdot \frac{p^4 e^6}{p e^2} = p e^4$, cette expression $p e^4$ sera le cinquième terme de cette progression Géométrique ascendante; laquelle s'exprimera plus simplement en écrivant $\frac{2}{3} p \cdot p e \cdot p e^2 \cdot p e^3 \cdot p e^4$, &c. où il faut bien remarquer, qu'en prenant un terme quelconque d'une progression Géométrique ascendante, on y trouvera toujours le produit du premier terme p par l'exposant e élevé à une puissance moindre d'un degré que le nombre qui indique sa place: car dans le cinquième terme $p e^4$, l'exposant e n'est élevé qu'à sa quatrième puissance, &c. & comme le dernier de ses termes en indique toujours le nombre n par la place qu'il occupe, il est évident que ce dernier terme =

$p e^{n-1}$. L'expression de la somme de tous les termes d'une pareille progression est donc $= s$, son premier terme $= p$, son second $= p e$, & son dernier $= p e^{n-1}$.

Que l'on se rappelle à présent la Résolution du n°. 270, & l'on verra que la somme des antécédents de cette progression est égale à la somme s de tous ses termes, moins le dernier $p e^{n-1}$; la somme des antécédents est donc $s - p e^{n-1}$; on y verra aussi que la somme de ses conséquents est égale à la somme s de tous ses termes, moins le premier p , & qu'ainsi l'expression de la somme des conséquents $= s - p$.

Mais il est démontré (n°. 258.) que, dans une suite de rapports Géométriques égaux, la somme des antécédents est à celle des conséquents, comme un antécédent quelconque est à son conséquent; c'est-à-dire ici que $s - p e^{n-1} : s - p :: p : p e$. Donc (en faisant le produit des extrêmes & celui des moyens) l'on a $p e s - p^2 e^n (a) = p s - p^2$; donc (en transposant) $p e s - p s = p^2 e^n - p^2$; & , divisant par p , l'on a $e s - s = p e^n - p$, ou $e - 1 \times s = p e^n - p$; & enfin, en divisant par $e - 1$, il vient $s = \frac{p e^n - p}{e - 1}$

pour la somme s de tous les termes de cette progression. Ce qui signifie que cette somme est égale au produit du premier terme p par l'exposant e , élevé à la puissance indiquée par le nombre n des

(a) On vient de voir qu'en multipliant $p e^{n-1}$ par $p e$, l'on a eu $p^2 e^n$. Car, si l'on multiplioit x^2 par x^3 , on auroit $x^2 + 3 = x^5$; ce qui fait voir que, quand les racines qui se multiplient sont les mêmes, on écrit au produit une seule fois la racine, & on lui donne pour exposant la somme des exposans des quantités qui se multiplient. Ainsi $p e^{n-1} \times p e$ ou $p e^1 = p^2 e^{n-1+1} = p^2 e^n$; comme on le voit dans le texte.

termes, pourvu que l'on en ôte le premier terme p , & que l'on en divise le reste par l'exposant e diminué de l'unité.

PROBLÈME,

Où l'on va voir l'application de la for-

$$mule s = \frac{p e^n - p}{e - 1}.$$

Un homme joue contre un autre au *Passe-Dix* avec trois dez. Le second a parié d'abord un Louis que le premier ne passeroit pas ; celui ci a passé. Le perdant, dont le projet étoit de se retirer du jeu dès qu'il auroit gagné un Louis, en met deux pour le second coup, & il les perd. Il en met donc quatre au troisième coup ; qu'il perd encore ; doublant toujours pour le coup suivant ce qu'il a perdu dans le précédent, il parvient à perdre tout l'or qu'il portoit : ayant néanmoins continué de parier sur sa parole d'honneur, il a perdu 20 coups de suite ; après quoi celui qui tenoit les dez a refusé de tenir les paris, voulant sçavoir si toutes ces pertes réunies n'excédoient pas les facultés de son adversaire.

RÉSOLUTION.

Il a perdu 1 au premier coup ; au second 2 ; au troisième 4 ; au quatrième 8 , &c. La suite des pertes forme donc la progression Géométrique ascendante $\ddot{::} 1 . 2 . 4 . 8 , \&c.$ dont il faut trouver

la somme. Prenez la formule $s = \frac{p e^n - p}{e - 1}$. Puis-

que le premier terme $p = 1$, l'exposant $e = 2$, le nombre des termes $n = 20$; en faisant la sub-

stitution, cette équation deviendra $s = \frac{1 \times 2^{20} - 1}{2 - 1}$

$= \frac{2^{20}}{2} - 1 = 2^{19} - 1$; c'est-à-dire, que la somme des Louis perdus est représentée par le produit de l'exposant 2 élevé à la vingtième puissance, duquel produit on ôtera 1.

Multipliez donc 2 par 2, vous aurez 4 pour la seconde puissance de 2. En multipliant 4 par 4, on aura 16 pour sa quatrième puissance ; & $16 \times 2 = 32$ en fera la cinquième puissance ; $32 \times 32 = 1024$ en fera la dixième ; ainsi, en multipliant 1024 par 1024, le produit 1048576 donnera la vingtième puissance de 2. Si l'on ôte 1, on trouvera que la perte totale est de 1048575 Louis. Ce qui est énorme.

Quand même le perdant n'auroit parié d'abord qu'un liard, il n'auroit pas laissé de perdre 13107 livres, 3 sols, 3 liards ; ce que vous trouverez, en divisant 1048575 liards par le nombre 80 qui exprime combien il y a de liards dans une livre. Cette dernière perte est toujours fort considérable pour un homme ordinaire, & démontre avec quelle circonspection l'on doit s'engager dans ces sortes de jeux ; puisqu'un premier pari, aussi vil que celui d'un liard, conduiroit néanmoins à une perte qui pourroit ruiner les affaires d'un très-grand nombre de particuliers.

PROBLÈME

QUI EST L'INVERSE DU PRÉCÉDENT.

Supposons présentement que le perdant de la question précédente prenne sa revanche & tienne les dez ; que son même adversaire parie deux Louis pour le premier coup, & qu'il double toujours au coup suivant, ce qu'il aura perdu dans le précédent, comme on a fait, ci-dessus. Combien doit-il perdre

de coups de suite, pour que son antagoniste ne lui doive plus rien ou presque rien ?

R É S O L U T I O N.

I. Quoique le premier pari soit double, dans ce Problème-ci, du premier pari de la question précédente, il faudra que son adversaire gagne dix-neuf coups de suite pour s'acquitter à peu près. Il ne perdra plus qu'un Louis.

D É M O N S T R A T I O N.

Reprenons l'équation $s = \frac{p e^n - p}{e - 1}$. Il s'agit d'en dégager l'inconnue n qui indique le nombre des coups. Multiplions ses deux membres par $e - 1$, & transposons ensuite $-p$; nous aurons $e s - s + p = p e^n$; divisant encore par p , l'équation deviendra $\frac{e s - s + p}{p} = e^n$. Or (supp.)

$e = 2$, & $p = 2$; donc on aura $\frac{2s - s + 2}{2} = 2^n$
 $= \frac{s + 2}{2}$; mais la somme s à gagner doit être égale à la somme perdue, laquelle est de 1048575 Louis; par conséquent $2^n = \frac{1048577}{2} = 524288 \frac{1}{2}$.

Elevez donc le nombre 2 à ses puissances successives, jusqu'à ce que vous en trouviez une $= 524288 \frac{1}{2}$ ou approchant; & son degré vous indiquera le nombre des coups de suite que doit gagner celui qui tient les dez. Vous verrez que la dix-neuvième puissance de 2 $= 524288$, nombre qui est très-proche de $524288 \frac{1}{2}$. Ainsi le nombre n des coups gagnés de suite doit être 19.

On le prouvera, en cherchant la somme s d'une progression Géométrique ascendante, dont le premier terme $p = 2$, l'exposant $e = 2$, le nombre

des termes $n = 19$; &, pour y parvenir, on reprendra la formule $s = \frac{pe^n - p}{e - 1}$, laquelle par la

$$\text{substitution des nombres deviendra } s = \frac{2 \times 2^{19} - 2}{2 - 1} \\ = \frac{2 \times 524288 - 2}{1} = 1048576 - 2 = 1048574$$

Louis. Ce gain ne diffère que d'un Louis de la perte précédente.

II. Si l'on a des Tables de Logarithmes fort étendues, on trouvera sans tâtonnement le nombre n des coups. Supposons que l mise à la tête d'un nombre, en exprime le Logarithme. Puisque $2^n = \frac{1048577}{2}$, comme on vient de le voir (Art. I.), le Logarithme de 2^n est égal au Logarithme de $\frac{1048577}{2}$; c'est-à-dire, $n l 2^* = l \frac{1048577}{2}$; &

par conséquent $n = \frac{l \frac{1048577}{2}}{l 2}$. Ce qui signifie qu'en divisant le Logarithme de $\frac{1048577}{2}$ par celui de 2, on aura au quotient le nombre n des coups, que l'on trouvera égal à 19.

* Si on ne concevoit pas d'abord que le Logarithme de $2^n = n l 2$, il faudroit se rappeler ou relire le n°. 264, où l'on a fait voir que le Logarithme d'un carré ou d'une seconde puissance est toujours double de celui de sa racine; que le Logarithme d'un cube ou d'une troisième puissance est le triple du Logarithme de sa racine, &c. C'est donc à dire que l'on a le Logarithme d'une puissance quelconque, en multipliant le Logarithme de sa racine par l'exposant de cette même puissance: par conséquent 2 étant la racine & n l'exposant de la puissance 2^n , l'expression de son Logarithme $= n l 2$.

On voit par-là qu'il ne faut pas pénétrer fort avant dans les secrets des nombres, pour tomber dans les Logarithmes. On y est jetté par les questions les plus communes, dont on ne sçauroit se démêler autrement que par de longs circuits, ou par des tâtonnemens qui font peu d'honneur au Mathématicien. Ceux qui auroient passé légèrement sur des Logarithmes, & qui se destineroient néanmoins à une profession ou à

Cependant, comme on ne doit point laisser aller seules des personnes qui ont compté sur un guide perpétuel, je vais les conduire. Elles ne trouveront point le Logarithme de 1048577 dans les Tables *in-8°*. d'Ozanam, que j'ai sous les yeux, comme les plus communes ; puisqu'on n'y a les Logarithmes des nombres naturels que jusqu'à 10000. Mais, en faisant usage de la méthode qui y est enseignée, on le trouvera de 6. 0206003 ; & le Logarithme de 2 = 0. 3010300. Or, puisqu'une fraction revient à une division, dans laquelle le numérateur seroit dividende & le dénominateur seroit diviseur, il faut (n°. 264.) ôter le Logarithme du dénominateur de celui du numérateur, pour avoir le Logarithme de cette fraction ; par conséquent celui de $\frac{1048577}{2} = 6. 0206003$ moins 0. 3010300 = 5. 7195703, que l'on doit diviser par le Logarithme de 2 = 0. 3010300, pour avoir le nombre des coups *n*. Or 57195703 divisés par 3010300 donnent au quotient 19 ; le 3 qui reste après la division, exprime une fraction si excessivement petite, qu'on la doit compter pour rien.

un état, dont les Mathématiques seroient la base, doivent y revenir indispensablement, en étudier scrupuleusement la nature, la formation, les usages, & s'en rendre la pratique très-familière. La question même, qui occasionne cette note, démontre que les Financiers & les Commerçans seroient très-bien de s'y exercer ; leurs intérêts forment souvent des progressions, dont ils apprécieroient les sommes avec une extrême facilité par le secours des Logarithmes.

Les Tables ordinaires de ces nombres ne sont pas assez étendues pour répondre à toutes les questions : mais, dans tous les Livres qui en traitent expressément & mathématiquement, on trouve un art fort simple d'avoir le Logarithme d'un nombre plus grand que ceux des Tables ; il est donc à propos de s'en fournir, & d'en avoir toujours sous sa main.

De la Progression Arithmétique.

273. La progression Arithmétique n'est qu'une proportion Arithmétique continue, qui a plus de trois termes. Elle est *ascendante* ou *descendante*, selon que ses termes vont en croissant ou en décroissant $1. 4 : 4. 6 : 6. 8 : 8. 10$, &c. est une progression Arithmétique ascendante, que l'on écrit plus simplement de cette manière, $\div 2. 4. 6. 8. 10$, &c. où vous remarquerez que la même différence règne toujours entre deux termes consécutifs quelconques, & que le second terme vaut la somme du premier, & de la différence entre deux termes consécutifs, que nous appellerons dans la suite, *différence de la progression*, en la désignant par la lettre d . Le troisième terme est égal au second, joint à la différence d ; mais le second = le premier $+ d$; donc le troisième = le premier $+ 2 d$; de même le quatrième = le troisième $+ d$; or le troisième = le premier $+ 2 d$; donc le quatrième = le premier $+ 3 d$; desorte que, 1°. *un terme quelconque d'une progression Arithmétique est toujours égal au premier terme, joint à la différence de la progression multipliée par le nombre des termes qui le précèdent.*

2°. Le dernier terme d'une progression Arithmétique est donc égal au premier, joint à la différence de la progression multipliée par le nombre de tous ses termes moins 1; puisque le nombre des termes qui le précèdent, est le même que celui de tous les termes de la progression, dont on ôte un terme. Appellant donc p le premier terme d'une progression Arithmétique quelconque, d sa différence, u son dernier terme, n le nombre de ses termes, on aura $u = p + d \times n - 1$.

3°. Par

3°. Par conséquent le premier terme p , le dernier u , & le nombre des termes n d'une progression Arithmétique étant donnés, on en trouvera la différence d , en ôtant le premier terme du dernier, & divisant ensuite ce reste par le nombre des termes moins 1. Car, puisque (Art. 2.) $u = p +$

$d \times n - 1$, on aura $u - p = d \times n - 1$; donc

$$\frac{u - p}{n - 1} = d.$$

4°. On déterminera aussi le nombre des termes d'une progression Arithmétique, dont le premier terme p , le dernier u , & la différence d seront donnés, en ôtant le premier du dernier, & divisant ce reste par la différence de la progression, puisqu'il ne s'en faudra que 1, que l'on n'ait alors le nombre des termes. Pour le démontrer, reprenons l'é-

quation $u = p + d \times n - 1$, laquelle, en transposant p , donnera $u - p = d \times n - 1$; donc

$$\frac{u - p}{d} = n - 1 : \text{où l'on voit qu'en ajoutant 1 à } n - 1,$$

l'on aura le nombre des termes n .

5°. Dans une progression Arithmétique quelconque $a . b . c . d . e . f . g$, &c. la somme $c + e$ de deux termes quelconques c, e , à égale distance des extrêmes a, g , est égale à la somme $a + g$ de ces extrêmes; il faut donc démontrer que $c + e = a + g$.

D É M O N S T R A T I O N.

En développant la progression de cette manière $a . b ; b . c ; c . d ; d . e ; e . f ; f . g$, il est visible que $a . b : f . g$; donc $a + g = b + f$: pareillement que $b . c : e . f$; donc $b + f = c + e$: ainsi $c + e = a + g$.

6°. Ainsi le nombre des termes étant impair,

comme dans la proposée, le double $2d$ du terme du milieu $= a + g$, somme des extrêmes. Car, en jettant un coup d'œil sur la progression développée, (Art. 5.) on voit que $c.d : d.e$; donc $2d = c + e$: or $c + e = a + g$ (Art. 5.); donc $2d = a + g$.

7°. Donc $d = \frac{a+g}{2}$, c'est à-dire, que le terme d du milieu est égal à la moitié de la somme des extrêmes $a + g$.

8°. La somme s de tous les termes d'une progression Arithmétique quelconque est égale à la somme des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes de cette progression.

DÉMONSTRATION.

Si le nombre des termes est pair, chaque somme de termes, à égale distance des extrêmes, renfermant deux termes, le nombre de ces sommes jointes à celle des extrêmes, ne fera que la moitié du nombre des termes de la progression. Or chacune de ces sommes est égale à celle des extrêmes (Art. 5.); en multipliant donc celle des extrêmes par le nombre de ces sommes, c'est à-dire, par la moitié du nombre des termes, on aura la valeur de toutes ces sommes, ou de toute la progression : ce qui donne l'équation $S = p + u \times \frac{n}{2}$.

Si le nombre des termes est impair, il n'y a qu'à supposer d'abord que l'on ôte le terme du milieu : le nombre des termes sera pair, & exprimé par $n - 1$; donc la somme des termes de cette progression, dont on aura ôté un terme, sera $p + u \times \frac{n-1}{2}$, à laquelle il ne manquera qu'un terme,

pour être la somme de la progression proposée : or ce terme ôté étant celui du milieu, est égal à $\frac{p+u}{2}$, c'est-à-dire, à la moitié de la somme des extrêmes; donc, pour compléter la somme des termes de cette progression, il faudra y remettre le terme ôté, qui est $\frac{p+u}{2}$; moyennant quoi la somme de tous les ter-

mes de la progression sera $S = \overline{p + u} \times \frac{n}{2} + \frac{p+u}{2} = \frac{pn+nu-p-u}{2} + \frac{p+u}{2} = \frac{pn+nu}{2} = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$. Ce qui signifie que la somme cherchée S est égale à la somme des extrêmes $p + u$ multipliée par $\frac{n}{2}$, moitié du nombre des termes. La proposition est donc généralement vraie, soit que le nombre des termes soit pair, soit qu'il soit impair.

9°. Par conséquent, si le premier terme d'une progression Arithmétique ascendante est 0, la somme de tous les termes de la progression sera égale au dernier terme multiplié par la moitié du nombre des termes; ce qui est tout-à-fait évident, quand même on n'auroit pas l'équation $S = \overline{p + u} \times \frac{n}{2}$, qui le démontre invinciblement; puisqu'en ôtant le premier terme p , que l'on suppose égal à zéro, elle devient $S = u \times \frac{n}{2}$; c'est-à-dire, égal au dernier terme u , multiplié par $\frac{n}{2}$, moitié du nombre des termes. Cette vérité est essentielle pour l'intelligence de mon *Traité des Sections Coniques & autres Courbes anciennes appliquées aux Arts*, que je publiai en 1750.

PROBLÈME,

Où l'on fait usage de la Progression Arithmétique.

On se propose de planter une Avenue, dont les deux côtés doivent avoir chacun 300 toises, les arbres à 3 toises l'un de l'autre. Pour les porter plus commodément à l'endroit de leur destination, celui qui en est chargé doit les prendre à 3 toises du premier que l'on plantera. Comme on suppose leur pesanteur assez considérable, il ne pourra en transporter qu'un seul à la fois. Afin donc que l'on puisse évaluer le tems qu'il emploiera à ce transport, on demande la longueur du chemin qu'il sera obligé de faire.

RÉSOLUTION.

Remarquez d'abord que pour remplir cette condition, il faut que l'ouvrier transporte cent & un arbres de chaque côté. Car le premier intervalle 3 toises exige deux arbres, un au commencement & l'autre à la fin : ainsi deux intervalles en exigeront trois ; pour trois il en faudra quatre ; & enfin cent intervalles, qui feront les 300 toises d'un côté, demanderont cent & un arbres.

Observez en second lieu, que chaque arbre, transporté séparément, exige l'aller & le venir. Il faudra que l'ouvrier fasse 6 toises de chemin pour le premier arbre, 12 pour le second, 18 pour le troisième, 24 pour le quatrième, &c. & 606 toises pour le cent unième & dernier. Or 6, 12, 18, 24, &c. forment une progression Arithmétique ; puisqu'il y a toujours la même différence 6 entre chaque terme consécutif. Le premier terme de cette Progression étant 6, le dernier 606, &

le nombre des termes 101, on en aura la somme S (Art. 8. du n°. 273.) en multipliant 612, qui est celle des extrêmes 6 & 606, par $\frac{101}{2}$ moitié de 101, nombre des termes de cette progression; c'est-à-dire, que $S = 612 \times \frac{101}{2} = 306 \times 101 = 30906$ toises.

L'ouvrier destiné au transport de ces arbres, sera donc obligé de faire, pour chaque côté de l'Avenue, un chemin de 30906 toises, & par conséquent 61812 toises pour les deux côtés.

Si l'on évalue la lieue Françoisie à 2550 toises, on verra que ce chemin est de 21 lieues, & un peu plus de deux tiers.

Je suppose ici vingt lieues au degré terrestre, & 57000 toises pour un degré moyen de la terre : car il paroît que les degrés des différentes latitudes ne sont pas tous précisément de la même longueur (a).

(a) *Ne sont pas tous précisément de la même longueur.* L'Académie des Sciences s'est fort occupée de ces recherches depuis trente ans. Elles pouvoient contribuer à la perfection de la Géographie & de la Navigation. Si la Terre est parfaitement ronde ou sphérique en tous sens, les degrés de sa circonférence doivent être tous de la même longueur. Mais une autre courbure doit y apporter des inégalités. En prenant en toises la longueur de quelques degrés dans la seule étendue de la France, leurs différences pouvoient n'être pas assez sensibles, mais le devenir à des distances fort éloignées.

Cette raison déterminâ le Roi à envoyer, en 1731, Mrs. Godin, Bouguer, & la Condamine au Pérou, vers les environs de l'équateur; & en 1737, Mrs. Maupertuis, Clairaut, le Camus & le Monnier, dans la Laponie Suédoise, aux environs du cercle polaire. Ceux-ci trouverent qu'un degré terrestre contenoit 57421 toises; on ne l'eut au Pérou que de 56753, tandis qu'on l'avoit en France de 57074 toises : par où l'on voit que les degrés terrestres croissent en longueur, en allant de l'équateur au pôle. Cependant ces différences ne paroissent pas assez considérables pour rien changer à la construction des Cartes.



CHAPITRE II.

Des Lignes Proportionnelles.

LEs proportions des nombres, dont nous avons établi les propriétés dans le Chapitre précédent, serviront de base aux proportions des lignes qui vont être l'objet de ce Chapitre. Une proportion *linéaire* une fois donnée, ses termes seront susceptibles des mêmes variations que ceux d'une proportion numérique. Ce qui nous importe donc ici particulièrement, est d'arriver à une proportion linéaire, & de déterminer dans quelles circonstances les lignes deviennent proportionnelles : car après cela on pourra leur faire subir toutes les transformations qui leur conviennent, suivant le besoin que l'on en aura ; mais nous avons promis de déduire immédiatement les unes des autres toutes les Propositions des trois premiers Livres de notre Géométrie ; il est donc nécessaire que la dernière Proposition du second Livre, qui est la dix-septième dans l'ordre des Propositions, soit le principe, ou tout au moins soit un des principes qui concourent à établir la première Proposition du troisième Livre, c'est-à-dire, la dix-huitième Proposition.

PROPOSITION XVIII.

274. Les surfaces des Triangles quelconques CAB , cab (*fig. 66.*) sont entre elles, comme les produits de leur base par leur hauteur.

Soit la surface du Triangle $CAB = S$, sa base $AB = B$, sa hauteur $CH = H$; & la surface du

Triangle $cab = s$, sa base $ab = b$, & sa hauteur $ch = h$. Il faut démontrer que $S . s :: BH . bh$.

DÉMONSTRATION.

Rappelez-vous la Proposition 17, (n° 172.) où il a été démontré que les Triangles de même base & de même hauteur sont égaux en surface; ainsi la surface du Triangle ABC, dont CH est la hauteur & AB la base, est égale à la surface d'un triangle rectangle, qui auroit AB pour base & CH pour hauteur. Or on détermine la surface d'un Triangle rectangle, en prenant la moitié du produit de sa base par sa

hauteur (n° 168.); par conséquent $S = \frac{BH}{2}$; &

par la même raison $s = \frac{bh}{2}$; donc $S . s :: \frac{BH}{2} . \frac{bh}{2}$

:: BH . bh : car les moitiés sont entre elles comme les tous dont elles sont moitiés. Ainsi $S, s :: BH . bh$; C. Q. F. D.

Cette Proposition n'a point de converse, parce qu'elle n'est pas composée de deux parties, dont l'une soit la conséquence de l'autre. (n° 177. Note a.)

Comme les Parallélogrammes sont doubles des Triangles, il est clair que les Parallélogrammes sont aussi comme les produits de leur base par leur hauteur.

PROBLÈME.

275. Déterminer le rapport de deux Triangles, dont l'un a 8 pieds de base sur 5 de hauteur, & l'autre 12 de base sur 6 de hauteur.

RÉSOLUTION.

Appellons s la surface du premier Triangle, & S celle du second.

Par la Proposition précédente $s . S :: 8 \times 5 . 12$

$\times 6 :: 8 \times 5.9 \times 8 :: 5.9$, en divisant par 8 les deux termes du dernier rapport, ce qui ne détruit pas la proportion (n°. 252.) ; donc $S.S :: 5.9$; c'est à-dire, que le premier triangle s ne contient que les $\frac{5}{9}$ du second triangle S .

La surface d'un triangle est donc connue dès que l'on fait son rapport à celle d'un autre triangle dont on a la mesure.

PROPOSITION XIX.

276. Les triangles de même hauteur sont entre eux comme leur base ; & les triangles de même base sont entre eux comme leur hauteur.

Remarquez que par triangles on entend ici l'aire ou la surface de ces triangles.

DÉMONSTRATION.

Supposant les mêmes dénominations que nous avons données (n° 274.) il s'agit de prouver que $S.s :: B.b$, si $H = h$, ou que $S.s :: H.h$, si $B = b$. Or (par la Proposition 18.) $S.s :: BH.bh$; donc, 1°. en divisant les deux derniers termes par $H = h$ (supp.), $S.s :: B.b$; ou, 2°. en divisant par $B = b$, $S.s :: H.h$; C. Q. F. D.

La converse de cette Proposition est vraie, c'est-à-dire, que les triangles, qui sont entre eux comme leur base, ont nécessairement même hauteur ; & ceux qui sont entre eux comme leur hauteur, ont nécessairement même base.

Il faut donc prouver que l'on aura $H = h$, si $S.s :: B.b$, ou que $B = b$, si $S.s :: H.h$.

DÉMONSTRATION.

1°. (Supp.) $S.s :: B.b$: d'un autre côté

(n°. 274.) $S. s :: BH. bh$; mais deux rapports , égaux à un troisième rapport , sont égaux entre eux ; donc $B. b :: BH. bh$; ainsi $Bbh = BbH$; & divisant l'un & l'autre membre par Bb , on a $h = H$; C. Q. F. 1°. D.

2°. Puisque (supp.) $S. s :: H. h$, & que (n°. 274.) $S. s :: BH. bh$; donc $H. h :: BH. bh$; ainsi $bHh = BHh$; & par conséquent en divisant l'un & l'autre membre par Hh , on a $B = b$; C. Q. F. 2°. D.

Les Parallélogrammes étant doubles des triangles , il faut leur attribuer les mêmes propriétés que nous venons de découvrir.

PROBLÈME.

277. Trouver le rapport d'un triangle , dont la base $= 7$ toises , & la hauteur en vaut 4 , à un autre triangle , dont la base $=$ aussi 7 toises & la hauteur 20.

RÉSOLUTION.

Dites : puisque ces triangles ont même base , ils sont entr'eux comme leurs hauteurs (par la Proposition précédente) : ainsi $s. S :: 4. 20 :: 1. 5$; donc $s. S :: 1. 5$, c'est-à-dire , que la surface de l'un n'est que la cinquième partie de la surface de l'autre.

PROPOSITION XX.

278. Deux triangles égaux en surface , & qui ont même base , ont nécessairement même hauteur , ou sont posés entre les mêmes parallèles.

On suppose donc que $S = s$, & $B = b$; d'où il faut conclure que $H = h$.

DÉMONSTRATION.

Par la Proposition précédente, les triangles de même base sont entr'eux comme leurs hauteurs; donc $S.s :: H.h$; mais (supp.) $S \equiv s$; ainsi $H \equiv h$; C. Q. F. D.

Réciproquement deux triangles égaux, qui ont même hauteur, ont nécessairement même base; c'est-à-dire, que si $S \equiv s$, & $H \equiv h$, on aura $B \equiv b$.

DÉMONSTRATION.

Les triangles de même hauteur sont entr'eux comme leurs bases (n°. 276.); donc $S.s :: B.b$; mais (par la supp.) $S \equiv s$; par conséquent $B \equiv b$; C. Q. F. D.

PROPOSITION XXI.

279. Une ligne BD qui coupe deux côtés AC, AF d'un triangle ACF, parallèlement à son troisième côté CF (fig. 67.), coupe ces deux côtés en proportion; c'est à dire, que $AB.BC :: AD.DF$.

Avant de procéder à la Démonstration, tirez les lignes CD, BF, & remarquez que le triangle CBD est égal au triangle FDB: car, en prenant BD pour base de ces triangles, on voit qu'ils sont posés entre les mêmes parallèles, BD, CF (supp.): ces triangles sont donc égaux (n°, 172.); cela posé.

DÉMONSTRATION.

Comparez le triangle ABD avec le triangle CBD; vous voyez qu'ils se terminent au même

point D : ainsi les considérant l'un & l'autre appuyés sur la ligne AC, comme ils le sont en effet, il est clair que ces deux Triangles ont même hauteur ; mais (n°. 276.) les Triangles de même hauteur sont entr'eux comme leur base ; par conséquent on a cette première Proportion (a) $TABD . TCBD :: AB . BC$. (parce que la hauteur de ces Triangles se prenant du point D, ce sont les côtés AB, BC opposés, qui en sont les bases.)

Comparez encore le même Triangle ABD avec le triangle FDB ; en les regardant comme appuyés sur la ligne AF, leur sommet se réunit au même point B : ils ont même hauteur, & par conséquent ces Triangles sont entr'eux comme leurs bases DA, DF ; ce qui donne cette autre proportion ,

$$TABD . TFDB :: AD . DF ;$$

& rapprochant la première proportion,

$$TABD . TCBD :: AB . BC ,$$

on a deux proportions, dont le premier rapport de la première, est égal au premier rapport de la seconde, puisque ce sont des grandeurs égales qui composent ces rapports de part & d'autre. Par conséquent les seconds rapports sont aussi égaux, c'est-à-dire, que $AB . BC :: AD . DF$; C. Q. F. D.

Comme cette Proposition est fondamentale, nous allons la résumer en peu de mots. Parce que les Triangles ABD, BCD, ont même hauteur, ils sont entr'eux comme leurs bases AB, BC ; par conséquent $TABD . TCBD :: AB . BC$; & par la même raison, $TABD . TFDB :: AD . DF$.

Ainsi de la première proportion l'on tire $\frac{TABD}{TCBD}$

(a) La Lettre T signifie le Triangle ; ainsi TABD veut dire le Triangle ABD.

$$= \frac{AB}{BC}; \text{ \& de la seconde il vient } \frac{TABD}{TFDB} = \frac{AD}{DF}.$$

Et, comme le Triangle CBD a été démontré égal au Triangle FDB, il s'ensuit que $\frac{TABD}{TCBD}$

$$= \frac{TABD}{TFDB}; \text{ \& par conséquent } \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DF},$$

ou autrement, $AB \cdot BC :: AD \cdot DF$.

La converse de cette Proposition est vraie c'est-à-dire, que si deux côtes AC, AF du triangle ACF sont coupés en parties proportionnelles par la ligne BD, cette ligne sera nécessairement parallèle au troisième côté CF.

Tirez, comme ci-dessus, les lignes CD, BF; on aura démontré que BD est parallèle à CF, si l'on fait voir que les Triangles CBD, FDB de même base BD, sont égaux en surface: car alors (par la Prop. 10.) des Triangles égaux en surface, qui ont d'ailleurs même base, ont nécessairement même hauteur; ou, ce qui est la même chose, sont nécessairement posés entre mêmes parallèles. Il s'agit donc de démontrer, qu'en supposant la proportion $AB \cdot BC :: AD \cdot DF$, ou l'équation

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DF}, \text{ on aura nécessairement le Trian-}$$

gle CDB = au Triangle FDB. (*fig. 67.*)

D É M O N S T R A T I O N.

Le Triangle CBD a même hauteur que le Triangle ABD; ces deux Triangles sont donc entr'eux comme leurs bases AB, BC (n°. 276); \& par conséquent on a cette proportion, $TABD \cdot TCBD :: AB \cdot BC$. Par la même raison, en

comparant le triangle ABD avec le triangle FDB, on trouve que $TABD.TFDB :: AD.DF$. De la première proportion on tire l'équation

suivante $\frac{TABD}{TCBD} = \frac{AB}{BC}$; & la seconde propor-

tion donne $\frac{TABD}{TFDB} = \frac{AD}{DF}$: mais (par la sup-

position) $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DF}$; donc $\frac{TABD}{TCBD} =$

$\frac{TABD}{TFDB}$, ou $TABD.TCBD :: TABD.TFDB$.

& en alternant, $TABD.TABD :: TCBD.TFDB$: or $TABD = TABD$; par conséquent $TCBD = TFDB$; c'est-à-dire, que le triangle CBD est égal au triangle FDB: de plus ces triangles ont la même base BD; donc (Prop. 20.) ils ont même hauteur, ou, ce qui est le même, ils sont posés entre mêmes parallèles; donc enfin BD est parallèle à CF; C. Q. F. D.

Toute la théorie des lignes proportionnelles est fondée sur cette proposition & sur sa converse: ce qui va suivre, n'en sera, pour ainsi dire, que le développement; c'est pourquoi il faut s'attacher à la bien comprendre: si une fois on l'a bien conçue, toutes les Propositions qui en tirent leur Démonstration, & qui ne sont pas en petit nombre, seront entendues presque en même tems qu'elles seront lûes.

COROLLAIRE I.

280. Puisque nous avons la proportion $AB.BC :: AD.DF$, nous pouvons lui appliquer les propriétés que nous avons démontrées touchant les proportions en général.

Ainsi, 1°. en alternant, $AB . AD :: BC . DF$.
 2°. (n°. 351.) $AB + BC . BC :: AD + DF . DF$, ou $AC . BC :: AF . DF$; & en alternant, on aura $AC . AF :: BC . DF$.

On pourra encore déduire cette autre Proportion, $AB + BC . AB :: AD + DF . AD$, ou bien $AC . AB :: AF . AD$, & en alternant, (n°. 250.) $AC . AF :: AB . AD$; c'est-à-dire en général, que les deux côtés d'un triangle, coupés par une ligne parallele au troisième côté, sont entr'eux comme leurs parties correspondantes.

COROLLAIRE II.

281. Ne tirons que la diagonale DC , (*fig. 68.*) & supposons que l'angle ADC soit coupé en deux parties égales par la parallele BD , (ce qui est toujours possible : car après avoir coupé l'angle ADC en deux parties égales x, y , par la ligne BD , on tirera par le point C une parallele CF à la ligne BD , & prolongeant le côté AD jusqu'à la rencontre de la parallele CF , on aura une figure semblable à celle de la Proposition 21.) dans ce cas, $x = s$, (à cause du parallélisme des lignes BD, CF ; & $y = t$ son angle alterne : mais (supp.) $x = y$; donc $s = t$: ainsi le triangle DCF est isoscèle (n°. 80.) ; donc $DC = DF$; par conséquent dans la Proportion $AB . BC :: AD . DF$, en mettant DC en la place de DF , elle deviendra $AB . BC :: AD . DC$, ou $AD . DC :: AB . BC$, ou $AD . AB :: DC . BC$.

C'est à-dire, que si l'on coupe un angle quelconque ADC d'un triangle en deux parties égales, la base AC de cet angle sera coupée en deux segmens AB, BC , proportionnels aux deux côtés AD, DC , qui forment cet angle.

Réciproquement, si la base AC de l'angle

ADC est coupée en deux segmens, AB, BC, proportionnels aux côtés AD, DC de l'angle ADC, ou, si l'on a la proportion $AB.BC :: AD.DC$, en tirant une ligne de D en B, elle coupera nécessairement l'angle ADC en deux parties égales x, y .

D É M O N S T R A T I O N.

Que l'on prolonge AD, jusqu'à ce qu'elle rencontre CF, menée parallèlement à DB par le point C, & l'on aura (279.) $AB.BC :: AD.DF$: or (supp.) $AB.BC :: AD.DC$; donc $AD.DF :: AD.DC$; donc $DF=DC$; donc l'angle $z=s$: mais $y=z$ (son alterne) $=s$, (comme on vient de le voir) $=x$ (à cause de DB parallèle à CF); ainsi $y=x$; C. Q. F. D.

On doit faire attention à ce Corollaire; nous en ferons usage.

C O R O L L A I R E III.

282. En comparant le triangle ABD avec le triangle BDC, (fig. 68.) si le côté AD est plus petit que le côté DC, l'angle g sera plus petit que l'angle A; parceque, dans un triangle quelconque ADC, un plus petit côté est opposé à un plus petit angle (n°. 82). Cependant l'angle x d'une part = l'angle y d'une autre part, & les côtés AD, AB, autour de l'angle A, sont proportionnels aux côtés DC, BC de l'angle $g < A$. Deux triangles ABD, BCD, peuvent donc avoir un angle égal, & des côtés autour d'un autre angle proportionnels, sans être pour cela des triangles équiangles (a).

(a) Les triangles équiangles sont ceux dont tous les angles sont égaux, chacun à chacun.

PROPOSITION XXII.

283. Les triangles équiangles ABC , obs , ont leurs côtés proportionnels. (*fig. 69.*)

On suppose donc que l'angle $B =$ l'angle b , que $A = o$, & que $C = s$. De cette supposition il en faut conclure, que deux côtés d'une part forment une proportion avec deux autres côtés de l'autre part, pourvu qu'ils soient opposés aux mêmes angles que les deux premiers côtés; c'est-à-dire, que l'on aura $BA . bo :: BC . bs :: AC . os$.

DÉMONSTRATION.

On suppose que les côtés du triangle ABC sont plus grands que les côtés du triangle obs : on pourra donc prendre sur le côté BA une partie BO égale au côté bo du petit triangle obs ; & sur l'autre côté BC une partie BS égale au côté bs du même triangle obs ; après cela, joignant les points O , S par la ligne OS , il est clair (à cause de l'angle $b = B$) que le triangle $BO S$, pris sur le grand triangle BAC , a tous ses côtés & tous ses angles égaux à ceux du triangle séparé bos . L'angle $BO S$ est donc égal à l'angle BAC ; ainsi les deux lignes OS , AC sont également inclinées sur la même ligne AB ; & OS est parallèle à AC : or (Prop. XXI. n°. 279.) une ligne qui coupe deux côtés d'un triangle parallèlement à son troisième côté; coupe ces côtés en parties proportionnelles. Donc $BO . OA :: BS . SC$; ainsi $BO + OA . BO :: BS + SC . BS$; c'est-à-dire, $BA . BO :: BC . BS$; C. Q. F. 1°. D.

On démontrera de même que $BC . bs : AC . os$: car prenant, comme ci-dessus, sur le grand triangle BAC le petit triangle bCo , égal au triangle

triangle séparé $bs o$, (*fig. 70.*) (ce qui est possible, puisque l'on suppose l'angle C d'une part, égal à l'angle s de l'autre part) on verra que le petit triangle bCo a tous ses angles égaux, chacun à chacun, à tous les angles du triangle BCA ; ainsi l'angle $Cbo =$ l'angle CBA ; & par conséquent les lignes bo , BA sont également inclinées sur la même ligne BC ; donc bo est parallèle à BA , & l'on a (*n°. 279. & 280.*) $BC.bC$, ou $bs :: CA.C o$ ou so ; *C. Q. F. 2°. D.*

Réciproquement, si les côtés du triangle BAC (*fig. 69.*) sont proportionnels aux côtés du triangle bos , ces triangles sont nécessairement équiangles; c'est-à-dire, que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun: on suppose donc que $BA.bo :: BC.bs :: CA.so$; & il en faut conclure, que les angles du triangle BAC sont égaux aux angles du triangle bos , chacun à chacun.

D É M O N S T R A T I O N .

Prenez sur le grand côté BA la partie $BO =$ le côté bo , & sur l'autre côté BC , la partie $BS =$ le côté bs du petit triangle bos : tirez enfin la ligne OS , & considérez que les côtés BA , BC du triangle BAC , étant coupés proportionnellement par la ligne OS , à cause que l'on suppose la proportion $BA.BO :: BC.BS$, il s'ensuit (par la conv. de la Prop. 21. *n°. 269.*) que la ligne OS est parallèle à la ligne AC , & par conséquent le triangle BOS est équiangle au triangle BAC ; mais si l'on démontre que le triangle BOS est égal en tout au triangle bos , on aura démontré que le petit triangle bos est aussi équiangle au grand triangle BAC : or l'on sçait déjà que les deux côtés BO , BS du triangle BOS , sont égaux aux deux côtés bo , bs du

triangle *bos* ; reste donc à démontrer que le troisième côté OS de l'un est égal au troisième côté *os* de l'autre.

Les deux triangles BAC, BOS étant équiangles, on a $BC.BS::CA.SO$; mais (par la supp.) $BC.bs::CA.so$; donc $CA.SO::CA.so$, ou $CA.CA::SO.so$: or $CA=CA$; par conséquent le côté SO du triangle BOS est égal au côté *so* de l'autre triangle *bos* : le triangle BOS est donc égal en tout au triangle *bos* ; par conséquent, comme le triangle BOS est équiangle au triangle BAC, il s'ensuit que le petit triangle *bos* est aussi équiangle au grand triangle BAC ; donc les triangles qui ont leurs côtés proportionnels, sont des triangles équiangles ; C. Q. F. D.

Cette Proposition est célèbre dans la Géométrie ; nous allons la retrouver par-tout à mesure que nous avancerons : on doit se la rendre très familière , afin de n'être point arrêté par la suite des conclusions que l'on en déduit avec une extrême facilité ; conclusions sur lesquelles va rouler dorénavant le reste de notre Géométrie, qui n'en fera , pour ainsi dire, qu'un Corollaire continué.

On appelle *Triangles semblables* (a) les triangles équiangles ; c'est pourquoi les triangles semblables ont leurs côtés proportionnels.

COROLLAIRE I.

284. Si l'angle B d'un triangle ABC est égal

(a) On observera que les triangles sont les seules figures qui soient semblables , dès qu'on les suppose équiangles. Les figures qui ont plus de trois côtés , peuvent être équiangles sans être semblables ; parce que , outre l'égalité des angles , il est encore nécessaire que les côtés de ces figures soient proportionnels , afin que l'on puisse assurer qu'elles sont semblables : or les figures qui ont plus de trois côtés , peuvent être équiangles , sans avoir leurs côtés proportionnels ; & réciproquement elles peuvent avoir leurs côtés proportionnels , sans être équiangles , comme on le verra plus bas.

à l'angle b d'un autre triangle bos , & que de plus les côtés BA , BC , qui sont autour du premier angle, soient proportionnels aux côtés bo , bs , qui sont autour du second angle, il est certain que ces deux triangles sont semblables; ou, ce qui est la même chose, que ces deux triangles sont équiangles. (*fig. 69.*)

DÉMONSTRATION.

Puisque l'angle B est égal à l'angle b , on pourra transporter l'angle obs sur l'angle ABC , pour avoir le triangle BOS égal en tout au triangle bos , en prenant la partie BO égale au côté bo , & la partie BS égale au côté bs . Cela fait, on aura (par la supposition) $BA \cdot BO$ ou $bo :: BC \cdot BS$ ou bs ; donc (par la conv. de la Prop. 21. n°. 269.), la ligne OS est parallèle au côté AC . Ainsi le triangle BOS ou bos est équiangle au triangle BAC ; & par conséquent deux triangles sont semblables, quand ils ont leurs côtés proportionnels autour d'un même angle; C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

285. Deux triangles sont semblables, quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun.

Car deux triangles qui ont deux angles égaux chacun à chacun, ont le troisième angle d'une part égal au troisième angle de l'autre part, & par conséquent ces triangles sont équiangles; donc ces triangles sont semblables (n°. 283.); C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

286. Si les deux triangles DBC , dba , (*fig. 71.*) qui ont les angles C , o égaux, & les côtés autour

Mij

des angles B, b , proportionnels, ont encore les angles D, d , de même espèce, c'est-à-dire, tous deux-obtus ou tous deux aigus; il faut nécessairement conclure que les angles B, b , compris entre les côtés proportionnels, sont égaux; & par conséquent que ces deux triangles sont semblables.

DÉMONSTRATION. *

Si l'on veut que l'un de ces deux angles soit plus grand que l'autre, par exemple, que B soit plus grand que b , retranchons de l'angle B l'angle $SBC = b$; alors les deux triangles SBC, dbo seront équiangles, puisque $C = c$, & que l'angle $SBC = dbc$; donc le troisième angle BSC sera égal au troisième angle d , & par conséquent les deux angles BSC & D seront de même espèce; & de plus, comme les triangles SBC, dbo sont équiangles, on aura $BC.BS :: bo.bd$; mais (par la supposition) $bo.bd :: BC.BD$; donc $BC.BS :: BC.BD$, & en alternant, $BC.BC :: BS.BD$: or $BC = BC$; donc $BS = BD$, & le triangle DSB est isoscèle; donc les angles opposés aux côtés égaux, sont égaux: ainsi l'angle DSB est égal à l'angle D , que nous avons déjà démontré être de même espèce que l'angle BSC ; par conséquent les trois angles D, DSB, BSC feroient de même espèce, ce qui est impossible: car il est évident que ces trois angles ne sauroient être en même tems, ou tous trois aigus, ou tous trois obtus, ou enfin tous trois des angles droits; par conséquent il est aussi impossible que les triangles DBC, dbo ne soient pas des triangles semblables; C. Q. F. D.

PROPOSITION XXIII.

287. Si d'un même point A (*fig. 72.*) pris au dehors ou au dedans d'un cercle, on tire deux lignes

AB, AF, dont chacune prolongée, s'il le faut, rencontre la circonférence en deux points, je dis, 1°. si le point A est au-dedans du cercle, que les parties de l'une sont réciproquement proportionnelles aux parties de l'autre; & que, 2°. si le point A est pris hors du cercle, les lignes entières sont réciproquement proportionnelles aux parties qui sont hors du cercle.

C'est la même démonstration pour les deux cas; mais, pour éviter la confusion, on appliquera la Démonstration à l'une des deux figures, & ensuite à l'autre. Il s'agit donc de démontrer que $AB \cdot AF :: AC \cdot AD$.

DÉMONSTRATION

Tirez les lignes BC, DF, & remarquez que le triangle CAB est équiangle au triangle DAF: car 1°. l'angle A = l'angle A, commun à l'un & l'autre triangle, ou bien opposé par le sommet, (n°. 45.) selon que l'on prendra l'une ou l'autre figure. 2°. L'angle F = l'angle B, puisque ces deux angles ayant leur sommet à la circonférence du cercle, ont pour mesure la moitié du même arc CD, qui passe entre leurs côtés (n°. 104.); donc le troisième angle ADF est égal au troisième angle ACB (n°. 78.); par conséquent les deux triangles CAB, DAF sont équiangles; donc ces triangles ont leurs côtés proportionnels, (Proposition XXII. n°, 283.) c'est-à-dire, que les côtés opposés à des angles égaux de part & d'autre, forment une proportion; par conséquent $AB \cdot AF :: AC \cdot AD$; C. Q. F. D.

REMARQUE.

Pour reconnoître facilement l'arrangement des côtés qui forment une proportion, à mesure que

l'on reconnoît l'égalité des angles dans les triangles que l'on compare, il faut marquer les angles égaux de part & d'autre par des signes semblables: ainsi nous avons marqué les angles égaux F , B par un point mis au-dedans de ces angles vers leur sommet; de même les angles égaux ACB , ADF ont été désignés par un même petit arc décrit de leur sommet. Quand on a pris cette précaution, il est très facile d'arranger, comme il faut, les termes de la proportion: car si vous la commencez par le côté AB du triangle CAB , observez à quel angle ce côté est opposé: c'est à l'angle ACB ; cherchez donc dans l'autre triangle DAF , l'angle ADF égal à l'angle ACB ; & le côté AF opposé à l'angle ADF , fera le second terme de la proportion: revenant ensuite au premier triangle CAB , on en prendra le côté AC , opposé à l'angle B , pour être le troisième terme de la proportion, & par conséquent le côté AD du triangle DAF fera le quatrième, puisque ce côté est opposé à l'angle $F = B$. En tenant toujours cette conduite, on ne se trompera jamais dans l'arrangement des côtés des triangles équiangles qui forment une proportion.

La converse de cette proposition est vraie, c'est-à-dire, si deux lignes qui se croisent au point A ; sont telles, que les parties de l'une AB , AD (*fig. 73.*) soient réciproquement proportionnelles aux parties AC , AF de l'autre: je dis que les extrémités C , D , F , B de ces lignes, sont nécessairement dans la circonférence d'un même cercle; en sorte qu'en faisant passer une circonférence de cercle par trois de ces points pris à volonté, elle passera nécessairement par le quatrième point.

On suppose donc que $AC \cdot AD :: AB \cdot AF$; d'où l'on se propose de conclure, que la circonférence

qui passeroit par les trois points C, B, D, passeroit aussi nécessairement par le quatrième point F.

DÉMONSTRATION.

Si la circonférence que l'on feroit passer par les trois points C, B, D, ne passoit pas par le quatrième point F, elle passeroit ou au-delà ou en-deçà du point F par rapport au point A ; mais nous allons faire voir qu'il est impossible qu'une pareille circonférence passe en-deçà ou au-delà du point F ; ce sera donc une nécessité qu'elle passe par le point F. Supposons pour un moment qu'elle passe par le point G en-deçà de F ; suivant ce que l'on vient de démontrer, on auroit $AC \cdot AD : : AB \cdot AG$; mais (par la supposition) l'on a $AC \cdot AD : : AB \cdot AF$; & par conséquent AG égaleroit AF , puisque ces deux lignes seroient une quatrième proportionnelle aux trois mêmes grandeurs AC , AD , AB : or il est impossible que AG soit égale à AF , une partie ne pouvant pas être égale à son tout ; donc aussi il est impossible que la circonférence supposée passe en-deçà de F. On prouvera précisément de la même manière, que cette circonférence ne passera pas en un point quelconque G au-delà de F. Elle passera donc nécessairement par le point F ; C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

288. Si du même point pris hors d'un cercle, on tire une sécante AF & une tangente AD , (fig. 74.) cette tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante entière AF & sa partie AC hors du cercle. Il s'agit donc de prouver que $AF \cdot AD : : AD \cdot AC$.

DÉMONSTRATION.

Supposons d'abord que ADB soit une sécante :

Miv

on a (par la Prop. XXIII.) $AF . AB :: AD . AC$.
 Représentons nous maintenant que la sécante ADB tende à devenir la tangente AD ; plus elle approchera d'être la tangente AD , plus les points D , B d'intersection seront proches l'un de l'autre, & ils se confondront totalement à l'instant que ADB deviendra la tangente AD : alors la sécante entière AB ne sera pas différente de sa partie AD hors du cercle; par conséquent, dans la proportion $AF . AB :: AD . AC$, mettant AD au lieu de $AB = AD$, la proportion deviendra $AF . AD :: AD . AC$, c'est-à-dire, que la tangente AD est moyenne proportionnelle entre la sécante entière & sa partie hors du cercle; C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

On peut tirer de-là une nouvelle Démonstration assez simple, que le carré de l'hypothénuse dans un triangle ABC ; rectangle en A (*Fig. M. PL. 7.*) est égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés AC , AB .

Car du point C , avec l'un des côtés AC , qui forment l'angle droit, décrivant une circonférence, & prolongeant l'hypothénuse BC jusqu'à sa rencontre D avec cette circonférence, si l'on fait $BC = h$, $AB = t$, $AC = CD = OC = r$, on aura $BD = BC + CD = h + r$, & $BO = BC - OC = h - r$; donc, puisque $BD . AB :: AB . BO$ (288.) c'est-à-dire, $h + r$.

$t :: t . h - r$, on trouvera $h + r \times h - r$, ou $hh - rr = tt$: ainsi (en transposant $-rr$) $hh = tt + rr$; C. Q. F. D.

Il arrive très-souvent dans la pratique des Arts, que l'on est obligé de faire rouler des cylindres, des essieux ou des axes les uns sur les autres; il faut

alors éviter le frottement le plus qu'il est possible : or en faisant tourner un essieu cylindrique entre trois cylindres , dont l'un en creux le retiendra sur les deux autres qui lui serviront d'appui , on aura très-peu de frottement , puisqu'il n'aura lieu qu'en trois points , ainsi que le montre *la Fig. L. de la PL. 7.*

Mais quel doit être le diamètre du cercle H , pour être logé entre les trois cercles A T N , A R C , C G N , de manière qu'il les touche tous trois en même tems ? Le Corollaire que nous venons de démontrer , va nous servir à la résolution de ce Problème.

Mais pour une plus parfaite intelligence de cette question , il est à propos de faire voir ; 1°. que deux ou plusieurs cercles , dont les diamètres commencent en un même point C ou G , sur une même ligne A G (*Fig. T. PL. 8.*) , ne se touchent qu'en un point unique ; soit que leurs convexités se rencontrent , comme il arrive aux cercles A S C , C S G ; soit que la convexité de l'un rencontre la concavité de l'autre ; tels que sont les cercles C S G , L G H.

DÉMONSTRATION.

Si les deux cercles A S C , C S G se rencontrent en quelqu'autre point S , différent de C , en menant les rayons B S , F S , l'on auroit (à cause de $BC = BS$ & de $CF = SF$) $BC + CF = BS + SF$, c'est-à-dire , $BF = BSF$; ce qui est visiblement absurde.

Pareillement , les deux cercles C S G , L G H , dont F , D sont les centres , ne peuvent se rencontrer en quelque point M , différent de G ; autrement l'on auroit $FG = FM$; donc $DF + FG = DF + FM$; mais $DF + FG$, c'est-à-dire D G , étant le rayon du cercle L G H (*supp.*) , seroit égal à D M , aussi rayon du même cercle ;

donc $DF + FM$ égalerait DM ; ce qui est encore absurde.

D'où il s'ensuit qu'en joignant par une ligne droite les centres B, F , des deux cercles ASC, CSG qui se touchent, cette ligne BF passera nécessairement par leur point de contingence C . Car en prenant une autre route, telle que BSF , le point S n'étant pas commun aux deux circonférences, comme on vient de voir, $BS + SF$ seroit plus longue que $BC + CF$, c'est-à-dire, qu'alors la ligne droite, menée de B en F , ne passeroit pas par le plus court chemin; ce qui est impossible.

PROBLÈME.

Etant donnés les trois cercles ATN, ARC, CGN , qui se touchent réciproquement par les extrémités A, C, N de leurs diamètres, (& que je suppose être les profils de trois cylindres) en trouver un quatrième H , qui touche en même-temps les trois premiers (*fig. L. PL. 7.*).

RÉSOLUTION.

Les deux cercles ARC, CGN étant égaux, parce que je fais $AC = CN$, il est clair que le centre H du cercle cherché doit se trouver sur le rayon CT , élevé perpendiculairement sur le milieu C du diamètre AN . Il s'agit donc de déterminer la longueur du rayon cherché TH .

Menons BH , qui passera nécessairement par le point de contingence R , comme étant évidemment le plus court chemin; & soit $AC = CT = CN = 2a$, $BC = BR = a$, $TH = RH = x$, on aura $CH = CT - TH = 2a - x$, & $BH = BR + RH = a + x$: alors le triangle rectangle CBH donnera (Cor. 2. du

n°. 288.) $\overline{BH} = \overline{BC} + \overline{CH}$ ou $aa + 2ax + xx = aa + 4aa - 4ax + xx$; ou (en ôtant de part & d'autre $aa + xx$, & en transposant $-4ax$) $6ax = 4aa$; donc $x = \frac{4aa}{6a} = \frac{2a}{3}$; ce qui signifie que le rayon TH ou

x du cercle cherché, doit être égal au tiers du rayon $CT = 2a$. Ainsi, pour résoudre pratiquement ce Problème, au centre & sur le diamètre AN du cercle enveloppant ATN on élèvera perpendiculairement le rayon CT: on en portera le tiers de T en H, & du centre H avec HT, on décrira le cercle RTH, qui touchera les trois cercles proposés.

J'ai dit que la ligne droite, menée de B en H, passoit nécessairement par le point R de contingence, étant clair que si elle n'y passoit pas, elle contiendrait plus que la somme des rayons BR, RH, & par conséquent ne seroit pas comme elle doit être, le plus court chemin de B en H.

PROPOSITION XXIV.

289. Une perpendiculaire DA (*fig. 75.*) abaissée d'un point D quelconque de la circonférence d'un cercle sur son diamètre CF, est moyenne proportionnelle entre les parties CA, AF de ce diamètre. Il faut donc démontrer que $CA \cdot DA :: DA \cdot AF$.

DÉMONSTRATION.

Prolongez la perpendiculaire DA jusqu'à ce qu'elle coupe la circonférence en un point B, & rappelez-vous qu'un rayon tel que OC perpendiculaire sur une corde DB, coupe nécessairement cette corde en deux parties égales (n°. 122.): ainsi

$DA = AB$; mais, par la proposition précédente, $AC . AD :: AB . AF$; donc, mettant dans cette proportion DA au lieu de AB qui lui est égale, elle deviendra $CA . DA :: DA . AF$. Ce qui fait voir que DA est moyenne proportionnelle entre les parties CA , AF du diamètre ; C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est fautive ; c'est-à-dire, il est faux qu'une ligne moyenne proportionnelle entre les parties CA , AF qu'elle coupe sur un diamètre, soit nécessairement une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence à laquelle ce diamètre appartient.

DÉMONSTRATION.

Du point A de la perpendiculaire DA tirez $AG = AD$ (*fig. 76.*) : AG ne pourra pas être une perpendiculaire sur le diamètre CF ; & cependant cette ligne AG sera moyenne proportionnelle entre les parties CA , AF qu'elle coupe sur le diamètre CF , puisque la perpendiculaire DA étant moyenne proportionnelle entre ces parties, son égale AG le sera aussi ; C. Q. F. D.

PROPOSITION XXV.

290. En supposant toujours la perpendiculaire DA sur le diamètre CF (*fig. 77.*), du point D tirez les lignes DC , DF aux extrémités C , F de ce diamètre ; les Triangles DCA , DFA seront semblables ou équiangles : ils seront aussi semblables au grand triangle CDF .

DÉMONSTRATION.

1°. Par la supposition, l'angle $x =$ l'angle y , puisque DA est perpendiculaire ; & par la proposition précédente, $CA . DA :: DA . AF$, c'est-

à-dire , que les triangles DCA , DFA ont leurs côtés proportionnels autour d'un même angle : or il a été démontré (n°. 284.) que dans ce cas les triangles étoient équiangles ; par conséquent les triangles DCA , DFA sont semblables ; C. Q. F. 1°. D.

2°. Le grand triangle CDF est semblable au petit triangle DCA : car ces deux triangles ont d'abord l'angle commun C ; en second lieu , ils ont chacun un angle droit , puisque l'angle x du petit triangle est droit (par la supposition) , & que l'angle CFD du grand triangle est aussi droit , parce qu'un angle à la circonférence , qui s'appuie sur le diamètre , est un angle droit (n°. 104.) : voilà donc deux angles d'une part égaux à deux angles de l'autre part , chacun à chacun ; donc le troisième angle CDA du petit triangle est égal au troisième angle CFD du grand triangle ; par conséquent le grand triangle CDF est équiangle au petit triangle DCA : ces deux triangles sont donc semblables ; C. Q. F. 2°. D.

3°. Le grand triangle CDF est aussi semblable à l'autre petit triangle DFA : car le petit triangle DFA étant , par la première partie de cette proposition , semblable au petit triangle DCA , que l'on vient de démontrer être semblable au grand triangle CDF , c'est une nécessité que deux triangles semblables à un troisième , soient semblables entr'eux ; par conséquent le grand triangle CDF est semblable au petit triangle DFA ; C. Q. F. 3°. D.

Vous pouvez démontrer autrement que le grand triangle CDF est semblable au petit triangle DFA : car , 1°. Ces deux triangles ont l'angle F commun. 2°. Ils ont chacun un angle droit , puisque (par la supp.) l'angle y du petit triangle

DFA est droit : & que l'angle CDF du grand triangle est aussi un angle droit, comme il a été démontré; ainsi le troisième angle FDA du petit triangle est égal au troisième angle DCF du grand triangle. Ces deux triangles sont donc équiangles, & par conséquent ils sont semblables.

Afin que l'on reconnoisse quels sont les angles égaux qui se répondent dans les deux triangles semblables DCA, DFA, il faut marquer les angles correspondans par des signes semblables, comme j'en ai déjà averti. Je le répète ici, parce que cela nous donne un moyen très-commode de comparer les côtés proportionnels des triangles semblables.

La converse de la proposition 25 n'est d'aucune utilité.

R E M A R Q U E.

291. Le triangle CDF est donc un triangle rectangle, dont le diamètre CF est l'hypothénuse, & la ligne DA est une perpendiculaire abaissée de l'angle droit sur l'hypothénuse. On voit donc que si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypothénuse, non-seulement cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothénuse; mais qu'elle divise encore le grand triangle en deux petits triangles semblables au grand triangle & semblables entr'eux. On doit bien retenir cette remarque.

P R O P O S I T I O N XXVI.

292. Si de l'angle droit D d'un triangle rectangle (*fig. 77.*) l'on abaisse une perpendiculaire DA sur l'hypothénuse CF, je dis que chaque côté du triangle devient une moyenne proportionnelle entre l'hypothénuse CF, & le segment qui répond

à ce côté ; c'est-à-dire , que l'on aura , 1°. $CF . CD :: CD . CA$; 2°. $CF . DF :: DF . AF$.

DÉMONSTRATION.

1°. Suivant la proposition 25 & le n°. 291 , le grand triangle CDF est semblable au petit triangle CDA ; par conséquent les côtés , opposés à des angles égaux , forment une proportion. Donc CF du grand triangle , opposé à l'angle droit CDF , est à CD opposé à l'angle droit A du petit triangle , comme CD , opposé à l'angle F du grand triangle , est à CA opposé à l'angle $CDA = F$, ou plus simplement $CF . CD :: CD . CA$; C. Q. F. 1°. D.

2°. Par la même Proposition 25 & le n°. 291 , le grand Triangle CDF est semblable au petit triangle DFA ; donc les côtés de ces triangles font en proportion. Par conséquent $CF . DF :: DF . AF$; C. Q. F. 2°. D.

La converse de cette Proposition est vraie ; c'est-à-dire que , si les côtés CD , DF d'un triangle rectangle CDF deviennent moyens proportionnels entre l'hypothénuse entière , & les segmens correspondans , faits par une ligne abaissée du sommet de l'angle droit , cette ligne sera nécessairement perpendiculaire sur l'hypothénuse. (*fig. 77.*)

Il faut donc démontrer que , si l'on a , par exemple , $CF . DF :: DF . AF$, on aura nécessairement les triangles CDF , DFA équiangles.

DÉMONSTRATION.

1°. Les triangles CDF , DFA ont l'angle F commun. 2°. Ils ont les côtés autour de ce même angle proportionnels : car c'est l'hypothèse. Or , (par le Corollaire 1. de la Prop. 22. n°. 284.) si un angle d'un triangle est égal à un angle d'un autre

triangle, & que de plus les côtés qui sont autour du premier angle, soient proportionnels aux côtés qui sont autour du second, ces deux triangles sont nécessairement semblables; ou, ce qui est la même chose, leurs angles opposés aux côtés proportionnels sont égaux; donc, puisque les deux triangles CDF , DAF ont ces propriétés; il faut que les angles qui sont opposés à leurs côtés proportionnels soient égaux; donc l'Angle DAF opposé à DF , est égal à l'angle CDF opposé à CF ; mais (par la supp.) l'angle CDF est droit; donc l'angle DAF est aussi un angle droit; Ainsi DA est une perpendiculaire; C. Q. F. D.

D'où l'on peut déduire une démonstration du carré de l'hypothénuse.

PROPOSITION XXVII.

293. Le carré $CBSF$ (*fig. 78.*) fait sur l'hypothénuse CF du triangle CDF rectangle en D , est égal à la somme des carrés $CDLM$, $DFPT$, construits sur les deux autres côtés.

Afin d'abréger le discours, j'appellerai \overline{CF} le carré fait sur CF ; \overline{CD} fera aussi l'expression du carré fait sur le côté CD ; & \overline{DF} désignera le carré fait sur le côté DF .

Il faut donc prouver que $\overline{CF} = \overline{CD} + \overline{DF}$.

DÉMONSTRATION.

De l'angle droit D abaissez sur l'hypothénuse la perpendiculaire DA , que vous prolongerez jusqu'au point O , afin qu'elle partage le carré \overline{CF} en deux rectangles $CBOA$, $AOSF$. Or si l'on démontre que le rectangle $CBOA = \overline{CD}$, & que le rectangle $AOSF = \overline{DF}$, on aura aussi démontré

démontré que le quarré \overline{CF} , qui vaut ces deux rectangles, est aussi égal aux quarrés \overline{CD} , \overline{DF} , pris ensemble.

Mais (par la Prop. XXVI.) on a $CF.CD::CD.CA$. Donc $\overline{CA \times CF}$, ou $\overline{CA \times CB} = \overline{CD \times CD} = \overline{CD}$. L'on a encore (par la même Prop.) $CF.DF::DF.AF$. Donc $\overline{AF \times CF}$, ou $\overline{AF \times AO} = \overline{DF}$.

Or $\overline{CA \times CB}$ est la valeur du rectangle $CBOA$; & $\overline{AF \times AO}$ est celle du rectangle $AOSF$; (n°. 165.) par conséquent, puisque $\overline{CA \times CB} = \overline{CD}$, le rectangle $CBOA$ est égal au quarré fait sur CD ; & comme aussi $\overline{AF \times AO} = \overline{DF}$, on voit que le rectangle $AOSF$ est égal au quarré fait sur DF . Par conséquent la somme des rectangles $AOSF$, $CBOA$, est égale à la somme des quarrés \overline{CD} , \overline{DF} ; mais le quarré \overline{CF} de l'hypothénuse est égal à la somme des deux rectangles; donc il est aussi égal à la somme des deux quarrés; c'est-à-dire, que $\overline{CF} = \overline{CD} + \overline{DF}$; C. Q. F. D. (a).

(a) On attribue cette découverte à Pithagore, qui fit, dit-on, en reconnaissance, un hécatombe, ou sacrifice de cent bœufs aux Muses.

Quand on a seulement parcouru les différentes parties des Mathématiques, il faut convenir que cette Proposition est d'un grand secours.

Mais comment Pithagore a-t-il vu les avantages qui devoient en résulter? Avait-il trouvé auparavant un grand nombre de Propositions fondées sur celle-ci, & qui n'attendoient que cette découverte pour être mises elles mêmes au nombre des grandes découvertes? L'Histoire n'en dit rien.

J'ai lu quelque part qu'elle lui avoit beaucoup servi à perfectionner l'Arithmétique: je la crois très-peu nécessaire à cet objet. Il m'a toujours paru bizarre que l'on démontrât l'Arithmétique par la Géométrie: on tombe non seulement dans un cercle vicieux, puisque la Géométrie a nécessairement besoin de l'Arithmétique; mais encore on renonce par-là à une déduction parfaite, à cette génération de vérités qui doivent toutes procéder du même principe, autant que cela est possible: or en appliquant à l'Arithmétique les principes de

La converse de cette Proposition est vraie; elle a été démontrée (n°. 189.).

COROLLAIRE I.

294. Puisque \overline{CF} ou $CF \times CF = \overline{CD} + \overline{DF}$ (fig. 78.); donc en tirant la racine quarrée de l'un &

de l'autre membre, on aura $CF = \sqrt{\overline{CD} + \overline{DF}}$ (a); c'est-à-dire que, si l'on connoît les deux côtés qui forment un angle droit, on aura la longueur de l'hypothénuse, en tirant la racine quarrée de la somme des quarrés des deux côtés connus.

La Géométrie, on change d'objet : les conclusions ne sont plus tirées d'un seul principe, à moins qu'on ne veuille dire qu'il seroit beaucoup mieux de commencer par la Géométrie pour passer à l'Arithmétique, ce qui n'est pas soutenable; l'expérience & le bon sens renversent cette prétention.

Jé conçois facilement la grande sensibilité de Pithagore à l'instant de sa découverte : elle lui rendoit un témoignage non équivoque de la force de son génie. Voilà pourquoi ceux qui ont une fois goûté des Mathématiques, poursuivent avec tant de chaleur les objets de leurs spéculations.

Mais la reconnaissance de Pithagore me paroît extrême : car il y a bien d'autres vérités en Géométrie plus sublimes & plus utiles, dont les Inventeurs ne se sont pas livrés à des transports si marqués. Telles sont celles qui enseignent que les trois angles d'un triangle sont égaux à deux angles droits : Que les triangles semblables ont leurs côtés proportionnels; & celles par où l'on résout tous les Problèmes de la Trigonométrie moyennant les sinus.

(a) Presque tous les Commenceans sont portés à croire que la racine quarrée de la somme de deux quarrés est égale à la somme des racines des deux quarrés; ils s'imaginent, par exemple, que la racine quarrée des deux quarrés $a + b$, prises ensemble, est égale à la somme $a + b$ des racines de chaque quarré.

C'est une pensée, dont ils reconnoîtront facilement l'erreur, s'ils réfléchissent qu'une racine quarrée multipliée par elle même doit produire le quarré dont elle est racine. Or en multipliant $a + b$ par $a + b$, le produit est $a + 2ab + b$, & non pas $a + b$, comme les premières apparences semblent l'annoncer; par conséquent de ce que le quarré de l'hypothénuse est égal à la somme des quarrés des deux côtés, on auroit tort de conclure que l'hypothénuse devroit être égale à la somme des côtés; proposition qui seroit d'ailleurs contraire aux premiers principes de la Géométrie, par lesquels il est évident qu'une ligne droite est plus courte qu'une ligne courbe ou anguleuse, qui a les mêmes extrémités. On est si peu accoutumé à des idées précises dans l'usage ordinaire de la vie, que l'on regarde souvent com-

COROLLAIRE II.

295. En supposant toujours \overline{CF} , ou $CF \times CF = \overline{CD} + \overline{DF}$, on aura $\overline{CF} - \overline{CD} = \overline{DF}$, ou $\overline{CF} - \overline{DF} = \overline{CD}$; & par conséquent $\overline{DF} = \sqrt{\overline{CF} - \overline{CD}}$, ou $CD = \sqrt{\overline{CF} - \overline{DF}}$; ce qui veut dire qu'en connoissant l'hypothénuse & l'un des côtés, on trouvera l'autre côté, si l'on extrait la racine quarrée de la différence qu'il y aura entre le quarré de l'hypothénuse, & le quarré du côté connu.

COROLLAIRE III.

Il s'ensuit encore que la Diagonale LC d'un quarré (*fig. 78.*) est incommensurable avec l'un de ses côtés MC ; c'est-à-dire, qu'en prenant une grandeur quelconque, qui mesure exactement le côté MC , cette grandeur ne mesurera pas exactement la Diagonale LC : il y aura toujours de l'excès ou du défaut, & l'on ne pourra pas déterminer le rapport numérique de cet excès ou de ce défaut à la grandeur qui aura servi de mesure.

DÉMONSTRATION.

Car (293.) $\overline{LC} = \overline{ML} + \overline{MC} = 2 \overline{MC}$ (puisque $ML = MC$): ainsi en tirant des racines quarrées, $LC = \sqrt{2 \overline{MC}}$; quantité inaffignable à toute rigueur, $2 \overline{MC}$ n'étant pas un quarré parfait. Par exemple, si l'on suppose MC long

me des vérités fort naturelles, les faussetés les plus avérées; & c'est une des principales raisons qui ont déterminé les Mathématiciens à démontrer ce qui ne paroît pas avoir besoin de démonstration.

N ij

de 1 pied, on ne pourra pas déterminer précisément la partie numérique que la Diagonale LC contiendra au-dessus d'un pied : car alors $LC = \sqrt{2}$ pieds quarrés; mais il est impossible de trouver en nombre précis la racine quarrée de 2. Donc, &c. C. Q. F. D.

Ainsi, quoique l'on puisse trouver la longueur de la racine quarrée de deux pieds quarrés, on ne peut pas sçavoir son rapport numérique à 1 pied courant. Il y a donc incommensurabilité entre la Diagonale d'un quarré & son côté.

PROPOSITION XXVIII.

296. Si du sommet D de l'angle obtus d'un triangle obtusangle, ou de l'angle aigu d'un triangle acutangle quelconque CDF scalène (*fig. 79.*), on abaisse une perpendiculaire DA sur le côté opposé CF, il arrivera que le quarré du côté CF, opposé à l'angle D, sera égal à la différence des quarrés des deux autres côtés DF, CD, plus deux fois le rectangle du côté CF par le petit segment CA.

Supposons $DF > DC$, afin d'avoir le segment $CA < AF$. Soit de plus $CF = a$, $DF = b$, $DC = c$, $CA = x$, $AF = a - x$, $DA = y$. Il s'agit de démontrer que $CF^2 = DF^2 - CD^2 + 2 CF \times CA$; ou, en substituant les valeurs de ces côtés, que $aa = bb - cc + 2ax$.

DÉMONSTRATION.

Remarquez que la perpendiculaire DA divise le triangle CDF en deux triangles DAC, DAF, rectangles en A; ainsi (par la Prop. précéd.) le quarré du côté DF est égal à la somme des quarrés

PROPORTIONNELLES. 197

faits sur les deux côtés DA, AF; & en exprimant cette égalité algébriquement, on a cette équation $bb = aa - 2ax + xx + yy$.

Par la même raison, le carré du côté CD est égal à la somme des carrés des côtés DA, CA; ce qui produit cette autre équation, $cc = xx + yy$; par conséquent, en substituant cc en la place de $xx + yy$ dans l'équation précédente, elle sera $bb = aa - 2ax + cc$; donc, en transposant les termes $- 2ax + cc$ du second membre de cette équation dans le premier, on aura $bb - cc + 2ax = aa$; C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

297. Par conséquent, si l'on connoît les trois côtés d'un triangle obtusangle ou acutangle, il sera très-facile de déterminer la valeur de l'un des deux segmens faits par une perpendiculaire, que l'on imagineroit abaissée de l'angle obtus, ou de l'angle aigu sur le côté opposé à cet angle.

Car en reprenant l'équation précédente $bb - cc + 2ax = aa$, on aura, en transposant, $2ax = aa + cc - bb$; donc $x = \frac{aa + cc - bb}{2a}$; ce

qui signifie que le petit segment CA se détermine, en faisant la somme des carrés du petit côté CD, & du côté CF, sur lequel tombe la perpendiculaire DA, de laquelle somme on doit retrancher le carré de l'autre côté DF, pour en diviser le reste par le double du côté CF: car le quotient de cette division donne la valeur du petit segment CA.

COROLLAIRE II.

298. On peut donc évaluer un triangle obtusangle ou acutangle par la seule connoissance de ses trois côtés, puisque après avoir déterminé le petit

segment CA (par le Coroll. 1.) que nous pouvons appeller d , le triangle rectangle CAD (*fig. 79.*) donne $cc = dd + yy$; donc $yy = cc - dd$; par conséquent $\sqrt{cc - dd} = y$ qui représente la perpendiculaire DA , que l'on connoitra, comme l'on voit, en retranchant le quarré du petit segment $CA = d$ du quarré du petit côté $DC = c$, & tirant ensuite la racine quarrée de ce reste. Or, quand on connoît la base & la hauteur d'un triangle, sa surface est connue; donc on peut mesurer un triangle par la seule connoissance de ses trois côtés; ce qui est d'un grand secours dans la pratique, où il n'est pas toujours possible d'abaisser des perpendiculaires. Cette vérité a déjà été prouvée (n^o. 194.) : il est à remarquer qu'en déterminant le grand segment AF , on trouveroit de même la perpendiculaire DA .

COROLLAIRE III.

299. En nous tenant toujours à la supposition de la Prop. 28, si les deux côtés CD , DF sont égaux, la perpendiculaire DA tombera sur le milieu du côté CF (*fig. 79.*), & rendra par conséquent égaux les deux segmens de ce côté, ce que l'équation $bb - cc + 2ax = aa$ fait connoître : car, puisque l'on suppose $b = c$, l'équation deviendra $2ax = aa$, en effaçant les deux termes $bb - cc$ qui se détruisent; donc $x = \frac{aa}{2a} = \frac{a}{2}$; ainsi le segment $CA = x$ fera égal à la moitié du côté $CF = a$; donc l'autre segment sera égal à l'autre moitié.

300. Mais comment juger par la simple connoissance des côtés, si un triangle est rectangle, obtusangle ou acutangle (*fig. 80*)?

Cela est fort aisé : nous avons vû qu'un triangle CDF rectangle en D , donnoit toujours le quarré de l'hypothénuse égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés (n°. 193.) ; mais supposons que l'angle droit CDF vienne à s'ouvrir ou à se fermer ; que son côté DC devienne DS ou DM , sans changer de longueur, il est clair que l'angle SDF étant obtus, le point S sera plus éloigné du point F que le point C : ainsi SF sera plus grande que l'hypothénuse CF , & par conséquent le quarré du côté SF opposé à l'angle obtus SDF , sera plus grand que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés.

On voit pareillement qu'en diminuant l'angle droit CDF qui peut devenir MDF , le point M du côté $DM = DC$ sera plus près du point F que le point C ; d'où il résulte que MF est plus petite que l'hypothénuse CF , & par conséquent que le quarré de MF , opposé à l'angle aigu MDF , est plus petit que la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés DM , DF .

Quand vous voudrez donc déterminer de quelle espèce est le triangle dont vous connoissez les trois côtés, faites le quarré du plus grand côté : si ce quarré est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés, le triangle est rectangle ; s'il est plus grand, le triangle est obtusangle ; & s'il est plus petit, le triangle est acutangle. On a déjà fait cette observation (n°. 191.) ; mais elle n'avoit pas été démontrée à la rigueur.

Nous n'avons pas besoin d'étendre davantage la théorie des lignes proportionnelles. Le petit nombre de Propositions que nous venons d'établir, est suffisant pour faire concevoir la méthode de lever routes sortes de plans, de construire des Cartes Topographiques, c'est-à-dire, de quelques lieux par-

riculiers, de réduire des figures de grand en petit ; ou de petit en grand, de trouver le rapport des figures semblables, tant de leurs contours que de leurs surfaces, de changer une figure en une autre, sans en augmenter ni en diminuer l'étendue, & enfin de plusieurs figures en faire une seule, qui n'ait pas plus de surface que toutes celles qui doivent la composer ; la résolution des Problèmes suivans en fera une preuve incontestable.

PROBLÈME.

301. Déterminer le rapport des circuits, des contours ou des périmètres des *figures semblables* différentes du triangle (fig. 81.).

Les *figures semblables* sont celles qui ont tous leurs angles égaux, chacun à chacun, & les côtés qui font les angles égaux, proportionnels. Ces figures peuvent être régulières ou irrégulières. Les figures régulières ont tous leur côtés égaux & tous leurs angles égaux ; mais, quand il y a de l'inégalité dans les côtés ou dans les angles d'une figure, on dit qu'elle est *irrégulière*. Le *circuit*, le *contour* ou le *périmètre* d'une figure, est une ligne telle que $ABCDEG$, qui enveloppe ou environne toute la surface de cette figure. Cherchons d'abord quel est le rapport des périmètres des figures régulières : prenons les deux exagones réguliers $ABCDEG$, $abcdeg$.

RÉSOLUTION.

302. Puisque tous les côtés du grand exagone sont égaux aussi-bien que ceux du petit, AB contient ab , comme six fois AB contient six fois ab ; donc $AB . ab :: 6 AB . 6 ab$. Or $6 AB = ABCDEG$, & $6 ab = abcdeg$; par conséquent $AB . ab :: ABCDEG . abcdeg$; ce qui

signifie , que les circuits des figures régulières du même nombre de côtés sont entr'eux comme un côté est à un côté.

En second lieu , si les figures sont irrégulières (fig. 82.) , mais semblables , c'est-à-dire , si l'angle $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $F = f$, & que les côtés qui forment ces angles , soient proportionnels , ou que l'on ait $AB . ab :: BC . bc :: CD . cd :: DF . df :: FA . fa$, il est évident (n°. 258.) que la somme des antécédens $AB + BC + CD + DF + FA$, est à la somme des conséquens $ab + bc + cd + df + fa$, comme un antécédent quelconque AB est à son conséquent ab ; mais la somme des antécédens compose les circuits de part & d'autre ; donc les périmètres ou les circuits des figures semblables , sont entr'eux comme un côté quelconque est à son côté correspondant ; C. Q. F. D.

Il est bon de sçavoir que les Géomètres appellent côtés homologues , les côtés correspondans dans les figures semblables : ainsi AB & ab , BC & bc , &c. sont des côtés homologues ; c'est pourquoi on dit ordinairement , que les circuits des figures semblables sont entr'eux comme les côtés homologues de ces figures.

COROLLAIRE I.

303. Si des points A , a (fig. 82.) , on tire les lignes AD , AC d'une part , & les lignes ad , ac de l'autre part : je dis que les périmètres de ces figures sont entr'eux comme les lignes AD , ad , ou AC , ac semblablement tirées , c'est-à-dire , tirées d'un angle correspondant à un angle correspondant (a).

(a) J'appelle Angle correspondant , l'angle d'une figure égal à l'angle d'une autre figure semblable : c'est pourquoi je marquerai toujours par les mêmes lettres les angles correspondans , afin que l'on puisse les reconnoître sans peine.

Car (par le Problème précédent) les circuits de ces figures sont entr'eux comme un côté AB est à son côté homologue ab ; mais puisque (supp.) l'angle $B = b$, & que $AB.ab :: BC.bc$, les triangles ABC, abc sont semblables (n°. 284.) ; par conséquent $AB.ab :: AC.ac$; donc les circuits seront aussi comme AC, ac : c'est-à-dire, en peu de mots, que *les périmètres des figures semblables sont entr'eux comme les lignes semblablement tirées dans ces figures.*

Par conséquent les périmètres des figures semblables sont entr'eux comme les perpendiculaires FS, fs , abaissées des angles correspondans, F, f , sur les côtés homologues AD, ad .

Dans les figures semblables régulières (fig. 81.), les périmètres sont aussi comme les rayons droits OM, om , ou comme les rayons obliques OG, og , parce que ces rayons sont des côtés homologues.

COROLLAIRE II.

304. Représentez-vous les deux cercles x, y , que l'on ait divisés en un nombre égal de parties égales, dont les points de division soient si proches les uns des autres, que les cordes tirées d'un point quelconque à un point voisin, paroissent se confondre avec les arcs, dont elles sont les sous-tendantes ; comme les courbures des cercles sont uniformes, si l'on a divisé, par exemple, en trente parties égales chaque circonférence, une trentième partie de la première sera à une trentième partie de la seconde, comme une autre trentième partie de la première est à une autre trentième partie de la seconde, & ainsi de suite jusqu'aux dernières parties : par conséquent toutes les parties de l'une seront à toutes les parties de l'autre, comme une partie est à une partie ; ou autrement, la circonférence

entière du premier cercle sera à la circonférence entière du second, comme un arc du premier est à l'arc correspondant du second. Mais quand la division de la circonférence est poussée très-loin, les arcs se confondent avec leurs cordes, & n'en sont plus différens; par conséquent les circonférences sont entr'elles, comme les cordes AB , ab des arcs correspondans : or les cordes des arcs correspondans sont entr'elles comme les rayons AC , ac de leurs cercles, parce qu'il est visible que les triangles ACB , acb sont semblables, lorsque l'arc AB est une même partie de sa circonférence que l'arc ab l'est de la sienne, l'angle ACB au centre étant alors égal à l'angle au centre acb , & les côtés de ces angles étant proportionnels (n°. 284.) ; donc, puisque les circonférences des cercles sont entr'elles comme les cordes de leurs arcs correspondans, & que ces cordes sont entr'elles comme les rayons de leurs cercles, il s'ensuit que *les périmètres ou les circonférences sont entr'elles comme leurs rayons*, ou, si l'en veut encore, *comme leurs diamètres qui sont doubles des rayons*.

Voilà pourquoi les Géomètres regardent les cercles comme des Polygones semblables. Cette idée est très-exacte ; on ne peut en contester la valeur, quand on a jetté un regard attentif sur la courbure du cercle.

COROLLAIRE III.

305. Les circonférences des cercles étant entr'elles comme leurs rayons ou comme leurs diamètres, il s'ensuit qu'une circonférence est double, triple, quadruple, &c. d'une autre circonférence, quand son rayon ou son diamètre est double, triple ou quadruple du rayon ou du diamètre de cette autre circonférence.

DES LIGNES

PROBLÈME.

306. Trouver le rapport des surfaces des figures semblables.

RÉSOLUTION.

1°. Commençons par les triangles semblables BAC , bac (*fig. 84.*). Des angles B , b correspondans, abaissons les perpendiculaires BD , bd sur les côtés homologues AC , ac ; il est évident que les triangles rectangles BDA , bda sont semblables, & qu'ainsi $AC.ac :: BD.bd$ (n°. 283.). Appellons S la surface du grand triangle; soit aussi sa base $AC = B$ & sa hauteur $BD = H$. De même nommons s la surface du petit triangle, b sa base ac , & h sa hauteur bd . Puisque la base AC est à la base ac , comme la hauteur BD est à la hauteur bd , on aura $B.b :: H.h$, ou $\frac{B}{b} = \frac{H}{h}$; donc $\frac{BB}{bb} = \frac{BH}{bh}$. Mais nous sçavons que les surfaces des Triangles sont entr'elles comme les produits de leur base par leur hauteur (n°. 274.); donc $S.s :: BH.bh$, ou $\frac{S}{s} = \frac{BH}{bh}$, & mettant $\frac{BB}{bb}$ au lieu de $\frac{BH}{bh} = \frac{BB}{bb}$, ainsi qu'on l'a trouvé ci-dessus, on a cette équation, $\frac{S}{s} = \frac{BB}{bb}$, ou $S.s :: BB.bb$: c'est-à-dire, que les surfaces des triangles sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, puisque AC est homologue à la base ac ; C. Q. F. D.

2°. Les Parallélogrames étant doubles des triangles, il est évident que les Parallélogrames semblables sont aussi entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues.

3°. Reprenons les Pentagones irréguliers sem-

blables (*fig. 82.*), dans lesquels des angles A, a correspondans, on a tiré les lignes $AD, AC, \& ad, ac$, qui divisent chaque figure en autant de triangles l'une que l'autre. On peut se convaincre aisément que chaque triangle de l'un est semblable au triangle correspondant de l'autre; par exemple, le triangle ABC est semblable au triangle abc : car (par la supp.), l'angle $B = b$, & $AB : ab :: BC : bc$; donc (n°. 284.) le triangle ABC est semblable au triangle abc : ainsi $BC : bc :: CA : ca$; mais $BC : bc :: CD : cd$; donc $CA : ca :: CD : cd$; de plus, les angles BCA, bca , opposés aux côtés homologues AB, ab , sont égaux, ce qui rend aussi égaux les angles DCA, dca ; par conséquent dans les triangles ACD, acd , vous avez les angles C, c égaux, & les côtés CA, CD de l'un, proportionnels aux côtés ca, cd de l'autre; donc (n°. 284.) les triangles ACD, acd sont semblables. Vous trouverez, en continuant, que le triangle AFD est semblable au triangle afd ; ainsi tous les triangles de la grande figure sont semblables à tous les triangles de la petite, chacun à son correspondant.

Cela supposé, puisque les Pentagones irréguliers sont semblables, $BC : bc :: CD : cd :: DF : df$;

donc (n°. 253.) $\overline{BC} : \overline{bc} :: \overline{CD} : \overline{cd} :: \overline{DF} : \overline{df}$.

Mais de plus les triangles de l'un sont semblables aux triangles correspondans de l'autre, comme on vient de voir : ainsi (n°. 1°. de cet art.) $TABC$.

$Tabc :: \overline{BC} : \overline{bc}$, & $TACD : Tacd :: \overline{CD} : \overline{cd}$; ainsi comme le rapport de \overline{BC} à \overline{bc} est égal

au rapport de \overline{DC} à \overline{dc} , on a $TABC : Tabc ::$

$TACD : Tacd$: enfin $TADF : Tadf :: \overline{DF} :$

à BD : cette parallèle détermine la ligne DX, qui est la quatrième proportionnelle cherchée.

D É M O N S T R A T I O N .

Lorsque deux côtés d'un triangle CAX sont coupés par une ligne parallèle à son troisième côté, ces côtés sont coupés proportionnellement (n°. 279.) : or c'est ce que fait la construction ; par conséquent $AB . BC :: AD . DX$: ainsi DX est la quatrième proportionnelle que l'on demandoit ; C. Q. F. D.

P R O B L È M E .

308. Trouver une troisième proportionnelle aux deux lignes AB, BC (*fig. 86.*).

R É S O L U T I O N .

Elle est la même que ci-dessus : car, après avoir porté sur l'un ou l'autre côté d'un angle quelconque OAM la première ligne AB, & du point B, où elle se termine, la seconde ligne BC, on portera cette même seconde ligne de A en G sur l'autre côté AM ; on joindra les points B, G, & par le point C tirant une parallèle CX à la ligne BG, cette parallèle ira déterminer sur le côté AM la ligne GX, qui est la troisième proportionnelle aux deux lignes AB, BC ; ce qui est évident, puisque $AB . BC :: AG$ ou $BC . GX$; C. Q. F. T. & D.

P R O B L È M E .

309. Trouver une moyenne proportionnelle entre les deux lignes AB, BD (*fig. 87.*).

R É S O L U T I O N .

Mettez sur une même ligne AD les deux lignes
AB₁

PROPORTIONNELLES. 209

AB, BD, l'une précisément à la suite de l'autre, & marquez le point B qui les sépare : coupez AD en deux parties égales au point C, & de ce point avec le rayon CA ou CD, décrivez une demi-circonférence ; enfin élevez au point B la perpendiculaire BS : elle sera moyenne proportionnelle entre les lignes AB, BD.

D É M O N S T R A T I O N.

Rappelez-vous la Proposition 24 (n°. 289.) où il a été démontré qu'une perpendiculaire abaissée d'un point quelconque de la circonférence d'un cercle sur son diamètre, est moyenne proportionnelle entre les parties de ce diamètre qu'elle coupe : or la ligne BS tombe dans ce cas ; elle est donc moyenne proportionnelle entre les lignes AB, BD ; c'est-à-dire, que $AB \cdot BS :: BS \cdot BD$, ainsi qu'on le demandoit ; C. Q. F. T. & D.

P R O B L Ê M E.

310. Couper une ligne BA en deux parties, telles que la ligne entière AB soit à une de ces parties BO, comme cette même partie BO est à l'autre partie OA.

On énonce ordinairement ce Problème ainsi : *Couper la ligne AB en moyenne & extrême raison.*

Il faut donc trouver cette proportion $AB \cdot BO :: BO \cdot OA$ (fig. 88.).

R É S O L U T I O N.

Sur l'une des extrémités A de la ligne AB donnée, élevez la perpendiculaire AC = la moitié de AB : du point C avec le rayon CA, décrivez un cercle dont la ligne AB sera nécessairement tangente (n°. 105.), & de l'extrémité B de la ligne

AB, menez BC au centre du cercle; la partie BS hors du cercle fera la moyenne cherchée: ainsi portant BS de B en O, la ligne AB sera coupée en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, que l'on aura $AB \cdot BO :: BO \cdot OA$.

D É M O N S T R A T I O N .

Puisque le rayon du cercle est égal à la moitié de AB (par la const.), son diamètre $GS = AB$; ainsi $BS = BG - AB$: or $BO = BS$ (const.); donc $BO = BG - AB$, & $AO = AB - BS = AB - BO$.

Rappelez-vous maintenant le Corollaire de la Proposition 23 (n°. 288.) où il a été démontré qu'une tangente est moyenne proportionnelle entre la sécance entière BG, & la partie BS hors du cercle: on aura donc $BG \cdot AB :: AB \cdot BS$; donc (n°. 251.) $BG - AB$ (BS ou BO). $AB :: AB - BS$ (AO). BS ou BO; c'est-à-dire plus simplement, $BO \cdot AB :: AO \cdot BO$; donc en renversant (n°. 250.) $AB \cdot BO :: BO \cdot AO$; la ligne AB est donc coupée, ainsi qu'on le demandoit. On va voir l'usage de ce Problème.

P R O B L È M E .

311. Déterminer le rapport du côté AB du Décagone inscrit dans un cercle au rayon CB de ce cercle (fig. 89.).

R É S O L U T I O N .

Tirez le rayon CA: l'angle $ACB = 36$ degrés, c'est-à-dire, la dixième partie de 360; ainsi en retranchant cet angle de 180 degrés, valeur des trois angles du triangle isocèle CAB, il reste 144 degrés pour la valeur des deux angles A, B;

PROPORTIONNELLES. 211

& comme ces deux angles sont égaux, il s'ensuit que chacun d'eux = 72 degrés, moitié de 144. Coupons un de ces angles CAB en deux parties s , x égales; l'angle s & l'angle x seront chacun de 36 degrés; l'angle c , au centre, étant aussi de 36 degrés, il s'ensuit 1° . que le triangle COA est isoscèle, & qu'ainsi $CO = OA$. 2° . Le triangle OAB est aussi isoscèle: car l'angle $x = 36$ degrés (par la const.), l'angle B en vaut 72; reste donc aussi 72 degrés pour l'angle AOB ; donc $OA = AB$: ainsi CO , OA , AB , sont trois lignes égales; mais il a été démontré (n $^\circ$. 281.) que si l'on coupoit un angle quelconque CAB d'un triangle en deux parties égales, la base CB de cet angle seroit nécessairement coupée en deux segmens CO , OB proportionnels aux deux côtés CA , AB qui forment cet angle: or l'angle CAB a été coupé en deux parties égales; donc $CA . AB :: CO . OB$: mais $CA = CB$, & $AB = CO$; par conséquent $CB . CO :: CO . OB$: ainsi CO est la moyenne proportionnelle du rayon CB coupé en moyenne & extrême raison, & par conséquent le côté du Décagone $AB = CO$ se trouve, en prenant la moyenne proportionnelle du rayon, coupé en moyenne & extrême raison.

Réciproquement, si l'on coupe le rayon CB en moyenne & extrême raison, c'est-à-dire, si l'on fait $CB . CO :: CO . OB$, & que l'on porte CO de B en A , l'arc AB sera de 36^d , ou la corde AB sera le côté du Décagone inscriptible au cercle de la fig. 89.

DÉMONSTRATION.

Après avoir tiré AC & AO , nous dirons: puisque (supp.) $CB . CO :: CO . OB$, à cause de $AB = CO$ (const.), nous aurons $CB . AB$
 Oij

1 : $AB \cdot OB$; donc (284.) les deux triangles CBA , OBA sont équiangles; donc l'angle $AOB = ABC$, & $AO = AB = OC$; donc l'angle $C = s$: mais puisque $ABC = BAC = s + x$, il s'ensuit que $AOB = s + x$; or $AOB = C + s$ (parce qu'il est extérieur au triangle AOC); donc $s + x = C + s$; donc $x = C$, & par conséquent les trois angles C, s, x sont égaux : à ces trois angles joignons l'angle ABC qui vaut $s + x$, ainsi qu'on l'a déjà vu, nous aurons, pour la valeur des trois angles du triangle ABC , les cinq angles égaux $C, s, x, s, x, = 5C = 180^\circ$; donc $C = \frac{180}{5} = 36^\circ$, & par conséquent l'arc AB , mesure de l'angle C au centre, est aussi de 36° ; C. Q. F. D.

C'est ce que nous avons promis de démontrer dans le premier Livre de nos Institutions, quand il a été question d'inscrire ou de circonscrire des Polygones réguliers au cercle. On doit se souvenir que j'y donne une construction, qui fait connoître à la fois le côté du Décagone & celui du Pentagone, inscriptibles au même cercle : je vais la répéter ici, parce qu'il faut que je la démontre.

PROBLÈME.

312. Trouver par une seule construction le côté du Décagone & celui du Pentagone, inscriptibles au même cercle (*fig. 90.*).

RÉSOLUTION.

Tirez le diamètre AB : élevez perpendiculairement le rayon CD : portez ce rayon de B en S & en O : tirez SO , pour avoir le rayon CB coupé en deux parties égales au point G , parce que la ligne SO ayant deux de ses points à égale distance des extrémités C, B , les aura tous : portez GD

de G en F sur le diamètre, & tirez D F. Je dis que C F est le côté du Décagone, & D F celui du Pentagone, inscriptibles au même cercle.

Démonstration de la première Partie.

On aura démontré que C F est le côté du Décagone, si on prouve que cette ligne est la moyenne du rayon coupé en moyenne & extrême raison. Or, en vous rappelant le n°. 310. où l'on a enseigné l'art de couper une ligne en moyenne & extrême raison, vous verrez qu'ayant élevé perpendiculairement sur l'extrémité du rayon D C la ligne C G qui en est la moitié, & décrit du point G un cercle C P, &c. tangent au rayon : vous verrez, dis-je, que la partie D P hors du cercle, est la moyenne du rayon coupé en moyenne & extrême raison ; par conséquent, puisque l'on a fait $G D = G F$, & que $G P = G C$, il est évident que $D P = F C$; par conséquent F C est aussi la moyenne proportionnelle du rayon coupé en moyenne & extrême raison ; ainsi (n°. 311.) elle est le côté du Décagone inscriptible au cercle ; C. Q. F. 1°. D.

Présentement, considérez le triangle rectangle D C F ; comme D C rayon du cercle est le côté de l'Héxagone inscriptible, s'il est vrai que F D soit le côté du Pentagone inscriptible, il faut (n°. 293.)

que $\overline{F D}$, carré du côté du Pentagone inscriptible, soit égal à la somme $\overline{F C} + \overline{C D}$ des carrés faits sur le côté de l'Héxagone & sur celui du Décagone, inscriptibles au même cercle : or c'est ce que nous allons démontrer.

Démonstration de la seconde partie.

Soit AB le côté du Pentagone (*fig. 91.*) ; AD ou DB celui du Décagone ; CA ou CB rayon du cercle ou côté de l'Héxagone, inscriptibles au même cercle. Du centre C abaissons une perpendiculaire CS sur le côté AD du Décagone, & remarquons, 1°. que le triangle AOD est un triangle isoscèle, parce que CS étant, par la construction, perpendiculaire sur le milieu du côté AD , le point O , où cette perpendiculaire coupe AB , est à égale distance de A & de D ; donc $AO = OD$; ainsi l'angle $A =$ l'angle ODA ; mais (par la construction) le triangle ADB est aussi isoscèle : ainsi l'angle $A =$ l'angle B ; les deux triangles AOD , ADB , ayant deux angles égaux, chacun à chacun, sont donc équiangles (n°. 285.) ; par conséquent (n°. 283.) les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels ; donc l'on a cette proportion, $AB . AD :: AO . AD$, d'où l'on tire $AD = AB \times AO$, 2°. Il est aussi très-facile de reconnoître que les triangles CAB , COB sont des triangles semblables : car, 1°. ils ont l'angle B commun. 2°. L'angle $OCB = 54$ degrés, puisqu'il est égal à l'angle ACB moins l'angle ACS , c'est-à-dire, à 72 degrés — 18 degrés = 54 degrés ; pareillement l'angle $CAB = 54$ degrés : car l'angle ACB au centre = 72 degrés ; reste donc 108 degrés pour les deux angles A , B . Ces deux angles sont égaux ; ils ont donc chacun 54 degrés ; par conséquent l'angle CAB est de 54 degrés, aussi bien que l'angle OCB ; donc (n°. 285.) les triangles CAB , COB sont équiangles, & par conséquent (n°. 283.) ils ont leurs côtés proportionnels ; donc $AB . CB$

$AB : CB :: OB : OB$; ainsi $AB \times OB = CB^2$; mais nous avons déjà trouvé que $AB \times OA = AD^2$; par conséquent $AB \times AO + OB = CB^2 + AD^2$; or $AO + OB = AB$; donc enfin $AB^2 = CB^2 + AD^2$, ce qui signifie que le carré du côté du Pentagone est égal à la somme des carrés faits sur le côté du Décagone & sur celui de l'Héxagone, inscriptibles au même cercle.

On n'a pas absolument besoin de cette dernière construction; pour avoir le côté du Pentagone, puisque ce côté se trouve, en doublant l'arc dont le côté du Décagone est sous-tendant; on peut donc la passer sans aucun inconvénient, si ce n'est que l'on se prive par-là d'une construction très-élégante.

PROBLÈME

323. Trouver une moyenne proportionnelle Arithmétique entre les deux lignes AB , BC (fig. 92.).

RÉSOLUTION.

Mettez ces deux lignes l'une à la suite de l'autre sur une même ligne AC ; coupez cette ligne en deux parties égales au point D : l'une de ces deux moitiés fera la moyenne Arithmétique proportionnelle entre les lignes données AB , BC .

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que la moyenne proportionnelle Arithmétique est la moitié de la somme des deux lignes AB , BC . Soit appelée x la ligne cherchée: on aura $AB : x :: x : BC$; donc (n°. 263.) $AB + BC = 2x$; par conséquent

$x = \frac{AB+BC}{2}$, c'est-à-dire, que la moyenne proportionnelle Arithmétique entre deux lignes est égale à la moitié de la somme de ces deux lignes ; C. Q. F. D.

PROBLÈME.

314. Avec la ligne MS faire un parallélogramme égal en surface au Parallélogramme ABDC (fig. 93.).

RÉSOLUTION.

On voit qu'il s'agit de trouver une ligne, dont la longueur multipliée par MS, donne un produit égal à celui de la base CD par la perpendiculaire AO, que l'on abaissera d'un angle quelconque sur le côté opposé, en cas que le Parallélogramme donné ne soit pas rectangle. Nommons X cette ligne inconnue : par la condition du Problème nous aurons $MS \times X = CD \times AO$ (n°. 165.) ; donc (n°. 245.) $MS.CD :: AO.X$, où l'on voit que la ligne qui résout le Problème, est une quatrième proportionnelle aux trois lignes données MS, CD, AO.

Cherchez donc cette quatrième proportionnelle MX (n°. 307.), & faites-en le rectangle MXP avec la ligne donnée MS ; ce rectangle aura la même surface que le Parallélogramme donné : car (par la construction) $MS.CD :: AO.MX$; donc $MS \times MX = CD \times AO$.

PROBLÈME.

315. Transformer en carré le rectangle MXP (fig. 93.), c'est-à-dire, trouver un carré, dont la surface soit égale à celle de ce rectangle,

R É S O L U T I O N .

Soit YY le quarré inconnu. Par la condition du Problème $YY = MX \times MS$; donc (n°. 246.) $MX . Y :: Y . MS$; il faut donc chercher une moyenne proportionnelle CD entre la hauteur MX & la base MS du rectangle proposé (n°. 309), & faire avec cette ligne le quarré $CDOS$ (fig. 94): il sera égal en surface au rectangle $MXPS$: car, par la construction, $MX . CD :: CD . MS$; donc $MX \times MS = \overline{CD}$; C. Q. F. D.

R E M A R Q U E.

316. Observons ici que plus les figures approchent d'être régulières, c'est-à-dire, moins leurs côtés diffèrent les uns des autres, moins aussi ils ont de circuit par rapport à l'aire ou à la surface que renferment ces côtés. Prenez un terrain rectangulaire ou un parallélogramme rectangle, dont la base $= 18$ toises & la hauteur 2 toises; la surface de ce terrain sera de 36 toises quarrées, & son circuit 40 toises courantes. Prenons un autre rectangle, dont les côtés diffèrent un peu moins; que sa base, par exemple, ait 12 toises & sa hauteur 3: la surface de ce rectangle sera égale au précédent, puisque $3 \times 12 = 36$; mais son circuit n'aura que 30 toises courantes; & si l'on avoit supposé la base de ce rectangle $= 9$ toises & sa hauteur $= 4$, sa surface auroit encore été de 36 toises quarrées, & son circuit de 26 toises courantes seulement: enfin plus les côtés de cette figure tendront à l'égalité, en y supposant toujours la même surface, moins le circuit sera grand; en sorte que le circuit de cette figure sera le plus petit possible, lorsque

la base sera égale à la hauteur : effectivement la base étant de 6 toises comme la hauteur, on aura toujours pour la surface 36 toises quarrées; mais le circuit sera réduit à 24 toises courantes, & ne pourra plus diminuer.

Cette observation peut être de quelque utilité, lorsque l'on fait construire des bâtimens destinés à servir de magasins; car, à surface égale, plus la figure de ces bâtimens sera régulière, moins il y faudra de muraille; ce qui est quelquefois d'une très-grande considération.

C'est une chose remarquable, que les Abeilles se conduisent exactement sur ce principe dans la construction de leurs *Alvéoles*: on appelle ainsi les petites cellules où ces Mouches déposent leur miel. Elles les construisent en Hexagones tous égaux & parfaitement réguliers. On a déjà vu (n°. 147. Tom. I.) qu'il n'y a que trois sortes de Polygones réguliers, dont on puisse faire usage pour carreler les appartemens, quand on veut n'employer à cette opération que des carreaux d'une même espèce: il faut absolument que ce soient ou des triangles équilatéraux, ou des quarrés, ou des Hexagones.

Entre la multitude infinie de Polygones qui pourroient se présenter à l'industrie des Abeilles, les seuls réguliers ont eû droit à leur sagesse, & les Hexagones à leur économie. Car, à circuit égal, c'est-à-dire, avec le même travail & la même dépense, on renferme plus de terrain dans un Hexagone régulier que dans un triangle équilatéral; ou que dans un quarré. Ainsi les Abeilles géométrisent dans leurs constructions; c'est un fait que déposent unanimement toutes les ruches; & la Géométrie va mettre le comble à la certitude de leur témoignage.

DÉMONSTRATION.

Supposons donc que le triangle équilatéral M (PL. 21.), le carré R, & l'hexagone régulier T aient le même circuit; que chacun, par exemple, ait 36 pieds de tour: je dis que le triangle renferme moins d'espace que le carré, & le carré moins que l'hexagone.

Cherchons d'abord la surface du triangle M: son circuit étant 36 (supposition), sa base $BC = 12$, dont la moitié $BD = 6$. Pour avoir la hauteur AD de ce triangle, remarquons, à cause de l'angle droit en D, que le

carré de l'hypothénuse $AB = BD + AD$;

donc $AB - BD = AD$; & comme $AB = 12$,

& $BD = 6$, AB fera $= 12 \times 12 = 144$,

& $BD = 6 \times 6 = 36$; ainsi l'équation AB

$- BD = AD$ deviendra $144 - 36 = AD$

$= 108$; par conséquent, en extrayant la racine

quarrée, $AD = \sqrt{108}$, laquelle vaut plus de

10, & ne vaut pas 11. Si on multiplie donc la

moitié de la base $BD = 6$ par 11, le produit 66

fera une aire plus grande que celle du triangle M.

Or le côté du carré R étant $= 9$, sa surface sera

$= 9 \times 9 = 81$, beaucoup plus grande que 66. Il est

donc démontré que le carré R est plus grand que

le triangle M.

Faisons voir présentement que l'hexagone T

$\triangleright R$, ou $\triangleright 81$. On sçait que le rayon $OS =$ le

côté SR de l'hexagone. Tout le circuit étant 36,

OS ou $SR = 6$, & $SP = 3$. L'angle en P est

droit; donc le quarré de l'hypothénuse $\overline{OS} = \overline{SP} + \overline{OP}$, ou $\overline{OS} - \overline{SP} = \overline{OP}$; c'est-à-dire, $36 - 9 = \overline{OP} = 27$. Ainsi la hauteur $OP = \sqrt{27}$, laquelle est plus grande que 5. En mul-

tipliant donc SP par OP , ou 3 par $\sqrt{27}$, pour avoir l'aire du triangle ORS , on aura un produit plus grand que $3 \times 5 = 15$. Il faut prendre six fois le triangle OSR pour avoir l'aire de l'héxagone; ainsi 15×6 sont moindres que cette aire. Or $15 \times 6 = 90 > 81$, que l'on a trouvé pour la surface du quarré R ; à plus forte raison l'espace renfermé dans l'héxagone est plus grand que celui du quarré; C. Q. F. D.

I. La démonstration seroit imparfaite, si on en bornoit l'application à un cas particulier. Rendons-la générale; & pour cela soit chacun des tir-cuits des figures proposées $= c$; chaque côté BC du triangle équilatéral M est le tiers de son contour, c'est-à-dire, $BC = \frac{c}{3}$, & BD , moitié

de BC , en est le sixième; ainsi $BD = \frac{c}{6}$; mais

on sçait que le quarré de l'hypothénuse $\overline{AB} = \overline{BD} + \overline{AD}$; donc $\overline{AB} - \overline{BD} = \overline{AD}$;

par conséquent, puisque $AB = \frac{c}{3}$, $\overline{AB} = \frac{c^2}{9}$,

& $BD = \frac{c}{6}$; l'équation précédente devient donc

$$\frac{c^2}{9} - \frac{c^2}{36} = \overline{AD} = \frac{4c^2}{36} - \frac{c^2}{36} = \frac{3c^2}{36} = \frac{c^2}{12};$$

ainsi la hauteur $AD = \sqrt{\frac{c^2}{12}}$ & l'aire du triangle $M = BD \times AD = \frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{12}}$.

II. Dans le carré R , chaque côté $GL = \frac{c}{4}$; donc $R = \frac{c}{4} \times \frac{c}{4} = \frac{c^2}{16}$. Or je dis que l'aire $\frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{12}}$ du triangle M , est plus petite que $\frac{c^2}{16}$, qui est celle du carré.

Car de deux grandeurs que l'on compare, celle-là est la plus petite dont le carré est le plus petit.

Le carré de l'aire $\frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{12}}$ du triangle M est $\frac{c^2}{4} \times \frac{c^2}{12}$; puisqu'une quantité affectée d'un radical, s'élève à son carré par cela seul qu'on en fait évanouir le radical, dont l'exposant est 2 (n°. 93. Alg.). En achevant la multiplication, le carré de l'aire du triangle M devient $= \frac{c^4}{432}$; mais en quartant $\frac{c^2}{16}$, qui est l'aire du carré R , on trouve $\frac{c^2}{16} \times \frac{c^2}{16} = \frac{c^4}{256}$. Or il est tout-à-fait

évident que $\frac{c^4}{432} < \frac{c^4}{256}$; puisqu'une fraction est d'autant plus petite que son dénominateur est plus grand, le numérateur restant le même. Le triangle équilatéral est donc plus petit que le carré de même circuit.

III. Recherchons présentement la surface de l'Héxagone régulier T . Son circuit étant $= c$ (supp.), son côté $SR = OS$ (n°. 119. *Tom. 1.*) $= \frac{c}{2}$, & $SP = \frac{c}{12}$; donc $OS = \frac{c^2}{16}$, & $SP = \frac{c^2}{144}$.

Or, comme on l'a vu ci-dessus, $\overline{OS} = \overline{SP}$
 $+ \overline{OP}$, ou $\overline{OS} - \overline{SP} = \overline{OP}$ (en substituant
 les nombres) $= \frac{c^2}{36} - \frac{c^2}{144} = \frac{4c^2}{144} - \frac{c^2}{144} = \frac{3c^2}{144}$
 $= \frac{c^2}{48}$, donc la hauteur $OP = \sqrt{\frac{c^2}{48}}$. On a l'aire
 d'un Polygone régulier, en multipliant la moitié de
 son contour par la perpendiculaire abaissée du
 centre sur l'un de ses côtés; ainsi l'aire de l'Héxa-
 gone $T = \frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{48}}$. On a vu (art. II.) que
 l'aire du quarré $R = \frac{c^2}{16}$. Ainsi il faut démontrer

que $\frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{48}} > \frac{c^2}{16}$. Or cette Démonstration
 fera complete, si l'on fait voir que le quarré de la
 première de ces deux quantités est plus grand que
 celui de la seconde. Le quarré de $\frac{c}{2} \times \sqrt{\frac{c^2}{48}}$ est
 $\frac{c^2}{4} \times \frac{c^2}{48}$ (art. II.) $= \frac{c^4}{192}$; & le quarré de $\frac{c^2}{16}$
 $= \frac{c^4}{256}$; mais il est évident que $\frac{c^4}{192} > \frac{c^4}{256}$; l'Héxa-
 gone est donc aussi plus grand que le quarré de même
 circuit; & c'est tout C. Q. F. D. (a).

Si des cercles disposés autour d'un point n'y
 laissent pas des vuides, comme on le voit (fig. L

(a) Comme les quantités qui se trouvent sous le signe radical dans
 le calcul précédent, n'ont point une racine quarrée que l'on puisse
 apprécier à toute rigueur, j'ai pris le parti de faire évanouir ces radi-
 caux; ce qui m'a conduit à une Démonstration fort simple, fondée
 sur un principe qui ne l'est pas moins. Voilà pourquoi des Proposi-
 tions, que l'on démontre en deux mots à des personnes un peu instrui-
 tes, exigent de longs circuits pour être entendues de celles qui ne le
 sont pas assez. Les premiers pas, que l'on fait dans l'application de la
 Géométrie aux besoins de la société, conduisent donc au calcul des
 radicaux. On le trouvera très-simplement expliqué & démontré au
 commencement de mon *Traité des Courbes ou des Sections Coniques appli-
 quées aux Arts*, enrichi de Dissertations historiques & critiques sur l'ori-
 gine des découvertes qui sont l'objet de ce Traité.

PL. 7), il paroît que les abeilles n'auroient pas manqué d'en faire usage pour la construction de leurs alvéoles; puisque de toutes les figures régulières de même circuit, le cercle est celle qui renferme un plus grand espace.

DÉMONSTRATION.

IV. Elle se réduit ici à faire voir que le cercle est plus grand que l'hexagone régulier. Rappelons-nous que, suivant Archimède, le diamètre d'un cercle étant 7, sa circonférence n'est pas tout-à-fait 22; & qu'ainsi en supposant la circonférence = 22, le diamètre est un peu plus de 7: car à une plus grande circonférence répond un plus grand diamètre. Nous le prendrons néanmoins sur le pied de 7; & l'aire du cercle qui en résultera sera évidemment plus petite que la véritable. Or, si l'on démontre que cette aire est plus grande que celle de l'hexagone, il faudra convenir, à plus forte raison, que le cercle est aussi plus grand.

Soit donc la circonférence de ce cercle = c ; ainsi qu'on l'a supposé pour le circuit des autres polygones réguliers: on aura son diamètre d (art. IV.) en faisant $22.7 :: c.d = \frac{7c}{22}$; donc le quart de ce diamètre ou la moitié du rayon est $\frac{7c}{22}$ divisé par

4, laquelle = $\frac{7c}{88}$. On sçait qu'on a l'aire d'un cercle en multipliant sa circonférence c par la moitié de son rayon $\frac{7c}{88}$; par conséquent l'aire du cer-

cle = $\frac{7c^2}{88}$, dont le carré = $\frac{49c^4}{88 \times 88} = \frac{49c^4}{44 \times 2 \times 88}$.

Or on a vû (art. III.) que le carré de l'aire de l'hexagone = $\frac{c^4}{192}$. Ainsi, en démontrant que

$\frac{49c^4}{44 \times 2 \times 88} > \frac{c^4}{192}$, il sera clair que le cercle est

aussi plus grand que l'héxagone de même circuit. Observons donc que $\frac{49c^4}{44 \times 2 \times 88} = \frac{44c^4}{44 \times 2 \times 88}$

+ $\frac{5c^4}{44 \times 2 \times 88}$; mais $\frac{44c^4}{44 \times 2 \times 88}$, (qui n'est qu'une partie du quarré de l'aire du cercle) $= \frac{c^4}{2 \times 88} = \frac{c^4}{176}$,

quantité visiblement plus grande que le quarré $\frac{c^4}{192}$ de la surface de l'héxagone ; car de deux fractions , qui ont le même numérateur , celle-là est la plus grande qui a le plus petit dénominateur ou le plus petit diviseur. Concluons - donc , sans en dire davantage , que l'aire d'un cercle est plus grande que celle d'un héxagone régulier de même circuit.

Mais est-elle plus grande que celle de tout polygone régulier de même circuit ? Le nombre des côtés du polygone , comparé au cercle , fût-il plus grand qu'aucun nombre donné , son aire sera toujours plus petite que le cercle ; & c'est-là une espèce de Paradoxe géométrique : car le rayon de ce polygone sera toujours plus grand que celui du cercle. Il n'y a , pour s'en convaincre , qu'à considérer le cercle X (PL. 21.) & le polygone quelconque T de même circuit ; le cercle décrit du centre O , avec le rayon OS , sera évidemment circonscrit à cette figure , que l'on suppose régulière. Ainsi la circonférence de ce cercle circonscrit sera plus grande que le périmètre du polygone inscrit. Or (supp.) ce périmètre = la circonférence du cercle X ; par conséquent la circonférence du cercle , circonscrit au polygone T , sera plus grande que celle du cercle X ; donc le rayon OS de la première sera plus grand que le rayon MG de la seconde.

Il y a plus : le polygone T , quoique plus petit , comme on le verra bientôt , que le cercle X de même

même contour, ne sçauroit être inscrit à ce cercle : autrement, le périmètre contenu seroit égal au contenant ; ce qui est absurde.

Néanmoins l'aire du Polygone régulier quelconque T est plus petite que le cercle X de même circuit.

D É M O N S T R A T I O N .

Soit $= c$ le circuit de l'une & de l'autre figure ; le rayon de X $= r$: soit aussi $= h$ la perpendiculaire O P, abaissée du centre O sur l'un des côtés quelconque S R du Polygone T. On sçait que, pour avoir l'aire de T, il faut multiplier la moitié de son circuit c par la perpendiculaire h ; ce qui donne $T = \frac{c \cdot h}{2}$; or le cercle X $= \frac{c \cdot r}{2}$; ainsi $T : X :: \frac{c \cdot h}{2} : \frac{c \cdot r}{2}$; & en divisant les deux derniers termes de cette proportion par $\frac{c}{2}$, on trouve $T : X :: h : r$. Si l'on démontre donc que $h < r$, il fera clair que $T < X$.

Il faut absolument que h soit égale à r , ou plus grande ou plus petite ; mais les deux premiers cas sont impossibles. Car, en décrivant un cercle du centre O avec O P $= h$, ce cercle seroit inscrit au Polygone T ; sa circonférence seroit par conséquent plus petite que le circuit de ce Polygone : cependant, si l'on supposoit $h = r$, la circonférence inscrite à T égaleroit la circonférence de X, puisque des rayons égaux donnent des circonférences égales ; or (supp.) la circonférence de X $=$ le contour de T ; donc la circonférence inscrite à T égaleroit aussi le circuit de ce Polygone ; ce qui est impossible.

On voit de même que h ne sçauroit être plus grande que r ; autrement la circonférence décrite

avec h du centre O , seroit en même tems inscrite au Polygone T , & plus grande que le périmètre de ce Polygone : puisqu'elle seroit plus grande que celle du cercle X , qui est égale à ce périmètre. Ainsi la perpendiculaire h ne pouvant être égale au rayon r , ni plus grande, c'est une nécessité qu'elle soit plus petite.

Reprenant donc la proportion $T . X :: h . r$; puisque $h < r$, on aura aussi $T < X$; C. Q. F. D.*

On voit par-là combien est grande l'erreur de ceux qui estiment la grandeur des Villes ou des terrains par leur circuit. Il y a des circonstances où un terrain pourroit contenir deux, trois, quatre fois, &c. moins qu'un autre, & cependant avoir quatre fois, cinq fois, &c. plus de circuit; le calcul en est trop aisé, nous ne nous y arrêterons pas plus long-tems.

PROBLÈME.

317. Quarrer un Triangle, ou déterminer le quarré dont la surface soit précisément égale à celle du Triangle ABC . (fig. 95.)

RÉSOLUTION.

D'un angle quelconque B abaissons une perpendiculaire BD sur le côté opposé AC , pour déterminer la base & la hauteur de ce triangle; & nommons Y le côté du quarré inconnu. Suivant la

* Cette dernière Démonstration étant absolument générale, puisqu'on ne l'a appliquée à aucun Polygone en particulier, j'aurois pu me dispenser de la comparaison de l'Hexagone au cercle, que j'ai faite ci-dessus; mais j'ai été bien-aise de faire voir qu'une Démonstration, qui s'applique à tous les cas, est quelquefois plus simple & plus aisée, que celle où il ne s'agiroit que d'un cas déterminé, ainsi que l'on peut s'en convaincre ici, en comparant cette dernière Démonstration à la précédente. Celle-ci a même un autre avantage; c'est qu'elle est totalement indépendante du rapport vrai ou approché de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

condition du Problème, nous aurons $YY = \frac{AC}{2}$
 $\times BD$. D'où l'on tire cette proportion, $\frac{AC}{2} : Y$
 $:: Y : BD$; ce qui nous montre que le côté du quar-
ré inconnu est une moyenne proportionnelle entre
la moitié de la base & la hauteur du triangle proposé.

Cherchons donc (n°. 309.) une moyenne pro-
portionnelle OS entre la moitié de la base AC &
la hauteur BD du triangle ABC. Sur cette ligne
OS faisons le carré OSBD; il sera égal en sur-
face au Triangle ABC.

D É M O N S T R A T I O N .

Par la construction, $\frac{AC}{2} . OS :: OS . BD$; donc
 $OS = \frac{AC}{2} \times BD$; c'est-à-dire, que le carré
fait sur OS est égal au produit de la moitié de la
base AC par la hauteur BD. Or ce produit expri-
me la surface du Triangle ABC. (n°. 177.) Donc,
&c. Une moyenne proportionnelle entre la base
entière & la moitié de la hauteur, auroit aussi dé-
terminé le carré cherché.

P R O B L Ê M E .

318. Faire que deux ou plusieurs parallélogram-
mes donnés aient la même hauteur, sans changer
de surface.

Voulez-vous que le grand Parallélogramme
ABDS soit de même hauteur MP que le petit
Parallélogramme BCFM? (fig. 96.)

R É S O L U T I O N .

Il est clair qu'il faut transformer le grand Paral-
lélogramme ABDS en un autre de même sur-
face

face, mais dont la hauteur $\equiv MP$. Reste donc à trouver la base de ce Parallélogramme inconnu. Appellons X cette base, & abaissons la perpendiculaire ST . Suivant la condition du Problème, $AB \times ST \equiv MP \times X$; donc $MP \cdot ST :: AB \cdot X$, où l'on voit que la base cherchée est une quatrième proportionnelle aux trois lignes données MP , ST , AB : ainsi (n°. 307.) on déterminera cette quatrième proportionnelle LN , qui servira de base au Parallélogramme $LNHR$, auquel on donnera la hauteur $RL \equiv MP$. Ce Parallélogramme fera égal en surface au Parallélogramme $BCFM$, ainsi qu'on le demandoit.

D É M O N S T R A T I O N .

La construction donne $MP \cdot ST :: AB \cdot LN$. Donc $LN \times MP \equiv AB \times ST$; mais (const.) $MP \equiv LR$: ainsi $LN \times LR \equiv AB \times ST$. C'est à-dire, que le Parallélogramme $LNHR$ est égal au Parallélogramme $ABDS$, en même tems qu'il a une hauteur égale à celle du petit Parallélogramme $BCFM$; & c'est tout ce que l'on demandoit.

C O R O L L A I R E I.

319. Il est aisé présentement de faire un seul Parallélogramme des deux Parallélogrammes $ABDS$, $BCFM$: on ajoutera (fig. 96.) la base BC du petit Parallélogramme à celle du Parallélogramme $LNHR$; c'est à-dire, que l'on fera le prolongement $LO \equiv BC$, & achevant le Parallélogramme $ONHG$, il sera égal aux deux Parallélogrammes $ABDS$, $BCFM$; ce qui est assez évident.

Par conséquent, en réduisant à la même hauteur tel nombre de Parallélogrammes que l'on voudra, on

en pourra toujours faire un seul Parallélogramme.

Il n'est pas besoin d'avertir que l'on auroit la même chose, si on les réduisoit tous à la même base; on feroit alors la somme de toutes les hauteurs de la même manière que l'on a pris la somme des bases, &c.

COROLLAIRE II.

320. Et comme l'on peut (n°. 315.) transformer un Rectangle quelconque en quarré, il est clair que l'on peut aussi trouver un seul quarré égal en surface à tel nombre de Parallélogrammes que l'on voudra supposer.

PROBLÈME.

320. Trouver un seul triangle égal à plusieurs triangles donnés *ABC, OGS.* (*fig. 97.*) On voit qu'il suffit d'en sçavoir réduire deux à un seul.

RÉSOLUTION.

Transformons *OGS* l'un des deux triangles en un autre de même surface, mais dont la hauteur soit égale à celle du triangle *ABC*.

Puisque la hauteur *AH* du triangle inconnu est donnée, il ne s'agit plus que de trouver sa base que j'appelle *X*. Or la condition du Problème est que

$$\frac{AH \times X}{1} = \frac{GS \times OT}{1}, \text{ Donc } AH \times X = GS \times$$

OT ; ainsi $AH . OT :: GS . X$; la base cherchée est donc une quatrième proportionnelle aux deux hauteurs *AH, OT*, & à la base *GS*. On trouvera cette quatrième proportionnelle *PR* (par le n°. 307.) : on en fera la base d'un triangle *PRH*, auquel on donnera pour hauteur $PH = AH$, & le triangle *PRH*, de même hauteur que le triangle *ABC*, aura une surface égale à celle du triangle *OGS*.

Puis donc que les deux triangles ABC , PRH sont de même hauteur, ajoutez la base $BC = PM$ de l'un, à la base PR de l'autre, & tirez HM ; il est évident que le triangle MHR est égal à la somme des deux triangles proposés ABC , OGS ; puis-que le triangle MHR renferme deux triangles qui sont égaux aux deux triangles ABC , OGS .

COROLLAIRE III.

322. Mais on a donné (n°. 317.) le moyen de quarrer un triangle; & par conséquent on peut trouver un seul carré égal à tel nombre de triangles que l'on voudra, après avoir réduit tous les triangles en un seul. Enfin toute figure, terminée par des lignes droites, se résout en triangles; il n'y a donc point de figures rectilignes, dont on ne puisse avoir la quadrature.

PROBLÈME.

323. Transformer un Trapèze $ABCD$, dont les deux côtés AB , DC sont parallèles, en un Parallélogramme qui lui soit égal en surface. (fig. 98.)

RÉSOLUTION.

Cherchez une moyenne proportionnelle Arithmétique (n°. 312.) entre la base DC supérieure & la base AB inférieure de ce Trapèze, c'est à-dire, coupez en deux parties égales la somme des bases AB , DC , & sur l'une de ces moitiés AS , faites le Rectangle $ASPD$, dont la hauteur AD soit égale à la hauteur DO du Trapèze; je dis que le Rectangle $ASPD$ est égal en surface au Trapèze $ABCD$.

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le Trapèze $ABCD$ est

égal à un Parallélogramme de même hauteur, dont la base est moyenne proportionnelle Arithmétique entre les bases AB , DC de ce Trapèze.

On fait (n°. 313.) que cette moyenne proportionnelle Arithmétique est égale à la moitié de la somme AM des deux bases AB , DC du Trapèze. Soit donc AS égale à cette moitié, & par le point S menons SP parallèle au côté AD ; en prolongeant CD , nous aurons le Parallélogramme $ASPD$ de même hauteur que le Trapèze, & dont la base AS sera une moyenne proportionnelle Arithmétique entre les bases parallèles AB , DC de ce Trapèze; il s'agit donc de démontrer que le Parallélogramme $ASPD$ est égal au Trapèze $ABCD$.

Premièrement, ces deux figures ont la partie commune $ASXCD$; reste à prouver que l'autre partie $CXP =$ l'autre partie BXS . Remarquez donc que (par la const.) $DC + CP = AS = SM = SB + MB$; ainsi $DC + CP = SB + BM$. Or $BM = DC$; (puisque AM est la somme des deux bases AB , DC) donc $CP = BS$: de plus, à cause des parallèles DP , AB , les angles a , d alternes internes sont égaux; les angles B , C le sont aussi: ainsi les deux triangles CXP , BXS , ayant un côté égal, & sur ce côté des angles égaux, chacun à chacun, sont parfaitement égaux en surface; (n°. 85.) & c'est tout ce qui restoit à prouver.

COROLLAIRE I.

324. Il est donc facile d'évaluer un Trapèze. Supposons que la base $AB = 14$ toises, $DC = 6$ toises, & la hauteur $DO = 10$: faites la somme $14 + 6 = 20$ des deux bases AB , DC . Prenez-en la moitié 10: multipliez cette moitié 10 par la hauteur $OD = 10$; le produit, 100 toises
Piv

232 DES LIGNES
 ses quarrées, sera la valeur du Trapèze ABCD.

COROLLAIRE II.

Puisque $CP = BS$, on aura $CX = XB$.
 Remarquez donc que la ligne Xt , menée par le milieu des deux côtés CB , DA , est égale à la moyenne proportionnelle Arithmétique entre les deux côtés AB , DC parallèles. (fig. 98.)

PROBLÈME.

325. Quarrer un cercle, c'est à-dire, trouver un quarré dont la surface soit égale à celle d'un cercle proposé.

RÉSOLUTION.

Jusqu'à présent ce Problème n'a point été résolu à la rigueur; il est devenu fameux sous le nom de la *Quadrature du Cercle*: on l'a tentée de bien des façons sans aucun succès; mais au fond une résolution exacte de ce Problème seroit beaucoup plus curieuse qu'utile: car, pour nos besoins, on a la mesure du cercle aussi précise qu'il est nécessaire.

Supposons que le cercle O (fig. 99.) soit la base d'une colonne. Enveloppez sa circonférence MCS avec une mesure pliante: remettez en ligne droite la partie qui s'est appliquée à la circonférence: prenez OM égale à cette mesure rectifiée, pour servir de base à un triangle MOS dont la hauteur $= OS$, rayon du cercle proposé. Il a été démontré (n°. 202.) que ce triangle est égal au cercle, en cas que la base OM soit au juste la longueur de la circonférence CSM : or il est facile de quarrer le triangle OMS , puisque (n°. 317.) il n'y a qu'à chercher une moyenne proportionnelle entre la moitié de la base OM & la hauteur OS : cette moyenne proportionnelle sera le côté du

quarré égal en surface au triangle OMS, & par conséquent au cercle proposé. En un mot, on a l'aire d'un cercle, en multipliant la moitié de la circonférence par le rayon.

PROBLÈME.

326. Trouver un quarré égal à tant de quarrés que l'on voudra (*fig. 100.*).

RÉSOLUTION.

Supposons que l'on demande un quarré qui soit égal aux trois quarrés A, B, C. Commençons par trouver une ligne qui soit le côté d'un quarré égal aux deux quarrés A, B. Pour cela, avec les deux côtés MF, FD des deux quarrés A, B, faites le triangle rectangle MFD : il est certain que le quarré fait sur l'hypothénuse MD, sera égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés DF, FM, c'est-à-dire, à la somme des quarrés A, B (n°. 293.). Après cela, sur une des extrémités M de l'hypothénuse MD, élevons perpendiculairement le côté MS du petit quarré C, & tirons l'hypothénuse DS; cette ligne DS sera le côté d'un quarré égal à la somme des trois quarrés A, B, C.

DÉMONSTRATION.

Le triangle DMS étant rectangle, le quarré fait sur l'hypothénuse DS est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres côtés MD, MS; (n°. 293.) ainsi $\overline{DS}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MS}^2$: mais MD étant l'hypothénuse du triangle rectangle DFM, on aura aussi $\overline{MD}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FM}^2$; par conséquent $\overline{DS}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{FM}^2 + \overline{MS}^2 =$ les

trois quarrés $A + B + C$; C. Q. F. D.

Si l'on avoit eu un quatrième quarré, on en auroit élevé le côté à angles droits au point S de l'hypothénuse DS, & la nouvelle hypothénuse, qui en seroit venue, auroit été le côté du quarré égal aux quatre quarrés proposés, & ainsi de suite.

PROBLÈME.

327. Trouver un cercle égal à la somme des cercles P, S, ou égal à tant de cercles que l'on voudra. (*fig. 101.*)

RÉSOLUTION.

Elle est la même que celle du Problème précédent. Construisez donc un triangle rectangle ABD, dont les côtés AB, BD soient les diamètres des cercles P, S donnés. Je dis que l'hypothénuse DA est le diamètre d'un cercle Y égal aux deux cercles P, S, ou, ce qui est la même chose, que le demi-cercle fait sur l'hypothénuse AD, est égal aux deux demi-cercles faits sur les deux diamètres AB, BD.

DÉMONSTRATION.

Il faut se rappeler le n°. 306. où il a été démontré que les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres; par conséquent $Y : S :: \overline{AD} : \overline{AB}$. De même l'on a cette autre proportion, $Y : P :: \overline{AD} : \overline{BD}$. Ainsi (n°. 255.) ajoutant par ordre, on aura $2 Y : S + P :: 2 \overline{AD} : \overline{BD} + \overline{AB}$. Et en divisant par 2 les antécédens (n°. 252,) on

4 $Y : S + P :: AD : BD + AB$: or (n°. 293.)

$AD = BD + AB$; donc aussi $Y = S + P$, c'est-à-dire, que le cercle Y , dont AD est le diamètre, vaut les deux cercles S, P ; ainsi qu'il falloit le démontrer.

En peu de mots, les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres : or le quarré du diamètre du cercle Y vaut la somme des quarrés faits sur les diamètres des cercles S, P ; donc aussi le cercle Y est égal aux deux cercles S, P .

Par ce moyen, vous pourrez trouver un cercle égal à tant de cercles que vous voudrez : mais cette construction s'étend à toutes les figures semblables que l'on voudroit réduire en une seule de même surface ; puisque, généralement parlant, les figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

C'est pourquoi, si l'on avoit deux Pentagones semblables, qu'il fallût réduire en un seul, on mettroit à angle droit deux côtés homologues, afin d'avoir un triangle rectangle, dont l'hypothénuse seroit le côté d'un pentagone semblable aux deux autres, & égal à leur somme.

COROLLAIRE.

328. Quand le triangle rectangle DBA est isoscèle, si l'on construit des demi-cercles sur chaque côté, il en résulte la quadrature d'une portion de cercle. (fig. 102.)

DÉMONSTRATION.

Le demi-cercle fait sur l'hypothénuse DA est égal aux deux demi-cercles égaux faits sur les deux autres côtés ; ainsi le demi-cercle de l'hypothénuse

est double du demi-cercle fait sur un côté DB ; donc la moitié du demi cercle de l'hypothénuse, c'est-à dire, le quart de cercle $BCDO$, est égal au demi-cercle BSD : mais le quart de cercle $BCDO$, & le demi-cercle BSD , ont le segment BDO commun; par conséquent la partie $BODS$, en forme de croissant, est égale au triangle BCD . Or on a la quadrature du triangle; par conséquent l'on a aussi la quadrature de la portion de cercle $BODS$.

Cette portion de cercle-quarrable est connue sous le nom de *Lunule d'Hypocrate*, Inventeur de cette quadrature. Il n'y a rien de plus élégant dans toute la Géométrie élémentaire; mais c'est une spéculation qui n'a guères d'autre usage que celui de plaire à l'esprit.

Le quarré de l'hypothénuse, dont Hyppocrate a fait usage pour la quadrature de sa Lunule, est aussi fort propre à l'élévation d'une perpendiculaire sur l'extrémité d'une ligne.

PROBLÈME.

329. Elever une perpendiculaire sur l'extrémité A d'une ligne AS , en faisant usage de la propriété du quarré de l'hypothénuse. (*fig. 103.*)

RÉSOLUTION.

Marquez cinq parties égales à volonté sur la ligne donnée AS . Prenez avec le compas trois de ces parties, & du point A tracez un arc de cercle. Prenez ensuite cinq de ces parties, & mettant une des pointes du compas sur le point 4, décrivez un autre arc qui coupe le premier en un point O . De ce point menez au point A la ligne OA ; elle sera perpendiculaire.

DÉMONSTRATION.

Tirez la ligne O_4 ; si la ligne AO est perpendiculaire, le triangle $O A_4$ doit être rectangle; & par conséquent le carré de l'hypothénuse O_4 , doit être égal à la somme des carrés faits sur les deux autres côtés AO , A_4 ; or cela arrive véritablement: car (par la construction) l'hypothénuse étant 5, son carré $= 25$, & la somme des carrés des deux autres côtés est $9 + 16 = 25$, valeur du carré de l'hypothénuse. Le triangle est donc rectangle en A , & par conséquent AO est une perpendiculaire; C. Q. F. D.

PROBLÈME.

Deux cercles concentriques, ou qui ont le même centre, étant donnés, trouver le cercle auquel est égale la couronne circulaire, comprise entre les deux circonférences de ces cercles. (*fig. G. PL. XI.*)

RÉOLUTION ANALYTIQUE.

Soit la circonférence du grand cercle $= P$; son rayon $= R$; son aire $= \frac{PR}{2}$; (*n°. 202.*) la circonférence du petit cercle $= p$; son rayon $= r$; son aire $= \frac{pr}{2}$. La couronne circulaire ou le cercle égal à cette couronne $= O = \frac{PR}{2} - \frac{pr}{2}$; étant évident que la couronne circulaire est égale à la différence du grand cercle au petit cercle. Menez le rayon CH . Vous aurez le triangle rectangle HDC , dont l'hypothénuse CH est le rayon du grand cercle, & le côté CD le rayon du petit: mais (*n°. 327.*) le cercle décrit avec l'hypothénuse CH vaut la somme des deux cer-

cles, dont l'un seroit construit avec le côté CD , & l'autre avec le côté DH , dont le cercle soit appelé M : ainsi $\frac{PR}{2} = \frac{pr}{2} + M$, ou $\frac{PR}{2} - \frac{pr}{2} = M$; mais il est évident que $\frac{PR}{2} - \frac{pr}{2} = 0$: donc $M = 0$; C. Q. F. D.

PROBLÈME.

330. Réduire une figure quelconque $ABCD FHL$ (fig. 104.) de grand en petit. C'est à-dire, trouver une autre figure semblable, plus petite, qui ait avec elle un rapport quelconque.

RÉSOLUTION.

Prenons un cas particulier. Supposons qu'il s'agisse de réduire cette figure en une autre qui n'en soit que les $\frac{2}{5}$. Si donc on appelle la figure totale S , celle que l'on cherche doit être $\frac{2}{5}$ de S ou $\frac{2S}{5}$.

De l'angle A tirons des lignes qui divisent la figure proposée en triangles. Puisque la figure que nous cherchons doit être semblable à celle-ci, il est nécessaire que les triangles dont elle sera composée, soient semblables, chacun à chacun, à ceux de la figure proposée, & que de plus chaque triangle ne soit que les $\frac{2}{5}$ de son correspondant. Cherchons donc un triangle semblable à un des triangles ABC de la figure, & qui ne soit que les $\frac{2}{5}$ de ce triangle: nommons a le côté AB connu, & soit appelé x le côté homologue du triangle cherché.

Faites bien attention que les figures semblables doivent être entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues (n°. 306.); nous aurons donc cette proportion, qui va résoudre le Problème: la figure donnée S est à la figure cherchée $\frac{2S}{5}$, comme le quarré aa du côté AB est au quarré xx du

côté homologue inconnu, ou simplement, $S. \frac{2^2}{5}$
 $:: aa.xx$. Et (en multipliant les deux premiers
 termes par 5 pour faire évanouir la fraction)
 $5 S. 2 S :: aa.xx$. En les divisant maintenant
 par S, on a $5.2 :: aa.xx$; donc $2aa = 5xx$;
 par conséquent $xx = \frac{2aa}{5} = \frac{2^2}{5} \times a$: d'où l'on
 tire $\frac{2^2}{5}.x :: x.a$. C'est-à-dire, que le côté x
 homologue au côté AB est une moyenne propor-
 tionnelle entre le côté AB & la cinquième partie
 du double de ce côté: je porte donc cette moyenne
 proportionnelle sur le côté AB de A en b , & je
 tire par b la ligne bc parallèle à BC; ensuite par
 C la ligne cd parallèle au côté correspondant CD;
 par d la parallèle df , &c. comme on le voit dans la
 figure; ce qui donne une figure $bcdfghl$ tout-à-
 fait semblable à la grande; puisqu'à cause du paral-
 lélisme, tous les côtés de l'une sont proportionnels
 à tous les côtés de l'autre. Reste donc à démontrer
 qu'en conséquence de la construction, la petite
 figure n'est que les $\frac{2}{5}$ de la grande.

DÉMONSTRATION.

Puisque les figures semblables doivent être en-
 tr'elles comme les quarrés de leurs côtés homolo-
 gues, s'il est vrai que la petite figure soit les $\frac{2}{5}$ de
 la grande, il est aussi nécessaire que le quarré xx
 du petit côté Ab ne soit que les deux cinquièmes
 du quarré aa du côté homologue AB; or cela
 est ainsi (par la construction) car $\frac{2^{AB}}{5} \left(\frac{2^2}{5} \right)$.

$Ab(x) :: Ab(x). AB(a)$; donc $\frac{2^{aa}}{5} = xx$:
 où l'on voit que le quarré xx du petit côté Ab est
 les $\frac{2}{5}$ du quarré aa du grand côté AB; C. Q. F. D.

L'équation $xx = \frac{2^{aa}}{5}$, que j'ai trouvée par une

seule proportion, pouvoit être trouvée en faisant usage de deux proportions. La grande figure a été appelée S; appellons f la petite figure cherchée. Puisque, suivant une des conditions du Problème, la petite figure doit être les $\frac{2}{5}$ de la grande, $f . S :: 2 . 5$; mais il y a une seconde condition, c'est que ces figures doivent être semblables. Or les figures semblables sont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues. Les quarrés homologues ont été nommés a, x ; donc on a cette autre proportion, $f . S :: xx . aa$, & en rapprochant la première proportion $f . S :: 2 . 5$, on voit que deux rapports, égaux à un troisième rapport, sont égaux entr'eux. Donc $xx . aa :: 2 . 5$, d'où l'on tire, comme ci-dessus, $2aa = 5xx$, ou $xx = \frac{2aa}{5}$.

Remarquez que l'équation $xx = \frac{2aa}{5}$ est une équation générale qui résout tous les cas possibles de cette espèce: car si on vouloit que la figure cherchée fût les $\frac{2}{9}$ de la figure proposée, au lieu de $\frac{2aa}{5}$ mettant $\frac{2}{9}$ dans l'équation formulaire $xx = \frac{2aa}{5}$ elle deviendrait $xx = \frac{2aa}{9}$, & le Problème seroit résolu en faisant $\frac{7^a}{9} . x :: x . a$; c'est-à-dire, en trouvant une moyenne proportionnelle entre le côté AB & la neuvième partie de son septuple, ou bien une moyenne proportionnelle entre le côté AB & les $\frac{2}{9}$ de ce côté: car $\frac{7^a}{9}$ sont la même chose que $\frac{2}{9}$ de a . (a)

(a) La méthode ordinaire de résoudre les Problèmes précédens est d'abord d'en proposer la Résolution, sans faire voir comment on y a été conduit; après quoi on démontre que la construction satisfait aux conditions du Problème. Nous avons pris une autre voie. Au lieu d'exposer une Résolution, nous la faisons découvrir: comme on est obligé par-là de faire attention aux données du Problème, de marcher

PROB.

PROBLÈME.

331. On a souvent besoin de réduire un plan de fortification de grand en petit. Moyennant la résolution du Problème ci-dessus, la réduction s'en fait avec une très grande facilité. Soit donc le plan d'un quarré quelconque ABCD (*fig. 105.*) fortifié, qu'il s'agit de réduire en un autre plan trois fois plus petit.

RÉSOLUTION.

D'un point O, pris au dedans de la figure, tirez les lignes OC, OS, OT, &c. à chaque angle. Appellons a le côté OC, & x le côté homologue correspondant. Puisque la figure cherchée doit être à celle-ci, comme 1 est à 3, dans l'équation formulaire $xx = \frac{a^2}{3}$ mettez $\frac{a}{3}$ au lieu de $\frac{a}{1}$; elle sera $xx = \frac{a^2}{9}$, donc $a : x :: x : \frac{a}{3}$. Ainsi le côté cherché, homologue au côté OC, est une moyenne proportionnelle entre a & $\frac{a}{3}$ ou le tiers de a ; por-

de conséquence en conséquence, en se rendant compte à chaque instant de ce que l'on doit faire pour avancer, on s'accoutume insensiblement à faire usage de ses forces, & même à devenir Inventeur.

Ceux qui ont bien saisi l'esprit de cette méthode, ont souvent plaisir à faire résoudre une question par eux mêmes, que d'en concevoir une résolution trouvée. Nous avons déjà fait observer que l'on n'étoit pas Géomètre, quoique l'on sçût beaucoup de Géométrie; il n'est besoin pour cela que de connoître ce que les autres ont découvert, de sçavoir historiquement un grand nombre de démonstrations, d'être au fait, s'il est permis de le dire, de ce que les autres ont pensé.

L'esprit de la Géométrie consiste dans l'art d'employer ce que l'on en sçait, pour découvrir ce que l'on ne sçait pas. On est très-avancé en Géométrie, quand on est parvenu à ce point; il n'y a plus, pour ainsi dire, qu'à se laisser aller pour devancer ceux qui en sçavent beaucoup. En effet, on peut assurer que l'on sçait toutes les Mathématiques, quand on en a l'instrument, & l'art de s'en servir. Ceux qui n'ont pas la vraie méthode sont toujours très-embarrassés, quand ils passent d'une partie des Mathématiques à une autre.

J'ai fait cette espèce de digression, afin que l'on conçoive qu'il est incomparablement plus avantageux de sçavoir bien la Géométrie, que d'en sçavoir beaucoup.

rez donc cette moyenne proportionnelle de O en c , & tirez cc parallèlement à CT , cs parallèlement à TS , & ainsi de suite, comme on l'a vu ci-dessus, & selon que la figure $ABCD$ le représente. Il est visible que la petite figure $abcd$ est tout-à-fait semblable à la grande figure $ABCD$: car, par la construction, les côtés de l'une sont proportionnels aux côtés de l'autre, à cause du parallélisme. De plus, la surface de la petite figure $abcd$ n'est que le tiers de la grande figure, puisque, selon la construction, $OC.Oc :: Oc.\frac{OC}{3}$, d'où l'on tire

$$\frac{OC}{3} = Oc; \text{ ce qui signifie que le carré du petit côté } Oc \text{ est le tiers du carré du grand côté } OC$$

homologue: mais les surfaces des figures semblables ont le même rapport que les carrés de leurs côtés homologues; par conséquent la petite figure $abcd$ n'est que le tiers de la grande; C. Q. F. D.

Tout ce qu'il faut observer dans la pratique, c'est de bien prendre garde à quel triangle répond chaque côté homologue. Revenons à la figure de ce Problème. Après avoir trouvé le point c du petit côté Oc , homologue au grand côté OC , on doit tirer cc parallèlement au grand côté CT ; mais par où le côté cc sera-t-il terminé? Observez dans quel triangle se trouve le grand côté CT ; c'est dans le triangle OCT : ainsi le petit côté cc , qui est homologue au grand côté CT , sera terminé par les deux côtés OC , OT du triangle OCT . On aura la même attention, quand il s'agira de déterminer les autres côtés homologues.

PROBLÈME.

333. Réduire de petit en grand une figure quelconque selon tel rapport que l'on voudra. (*fig. 106.*)

RÉSOLUTION.

Elle est précisément la même que celle du Problème précédent. C'est uniquement pour le faire voir, que j'en donne un exemple.

D'un point o , pris au-dedans de la petite figure, tirez à chacun de ses angles les lignes oa , ob , oc , &c. que vous prolongerez indéfiniment. Appelons a un de ces côtés oa , & nommons x le côté de la grande figure qui doit lui répondre ou lui être homologue. On veut une figure semblable qui soit quatre fois plus grande? Donc (n°. 306.) le carré de l'un de ses côtés doit être quatre fois plus grand que le carré du côté homologue de la petite figure proposée $abcdf$; on aura donc $xx = 4aa$; par conséquent $4a.x :: x.a$, où l'on voit que le côté de la grande figure homologue au petit côté oa , est une moyenne proportionnelle entre oa , & le quadruple de oa : portez donc cette moyenne proportionnelle de o en A sur le petit côté oa , prolongé; & par ce point A tirez AB parallèlement au côté ab , & le reste, comme ci-dessus. La grande figure $ABCDf$, qui en résultera, sera non seulement semblable à la petite figure $abcdf$, mais encore elle en sera le quadruple. Cela est trop évident pour avoir besoin de démonstration, après tout ce que nous avons dit.

En tirant des lignes dans un plan, pour le réduire en triangles, & mener ensuite des parallèles, comme nous avons fait aux n°. 331 & 332, la figure dont on propose la réduction, deviendrait fort souvent, ainsi que la réduite, si chargée de lignes que la confusion & l'excessive longueur du travail en seroient presque inévitables. Quelques-uns prennent donc le parti de faire une échelle plus petite ou plus grande que celle du plan proposé,

selon qu'ils veulent l'avoir ou plus petit ou plus grand. Mais l'échelle a encore un inconvénient ; on n'y sauroit distinguer les petites parties, à moins que cette échelle ne soit considérablement longue ; & c'est précisément ce que l'on cherche à éviter, quand il faut réduire de grand en petit. On tombe alors souvent dans le cas de se conduire par estime ; mais, outre que l'estime n'est point Géométrique, elle exige une très longue pratique avant que l'on puisse compter sur une exactitude recevable.

Une méthode rigoureusement & très-simplement démontrée, qui joindroit la plus grande justesse à l'économie du tems, qui supprimeroit la division ou la graduation de l'échelle, qui n'exigeroit de la part du Praticien, aucune habitude antérieure, que celle de tracer une ligne droite & un cercle ; une méthode enfin, où l'on n'auroit jamais recours à l'estime, & qui ne feroit décrire aucune ligne sur le plan à réduire, auroit des avantages bien réels sur celles dont nous avons déjà parlé, & sur quelques autres, dont nous parlerons après. Or nous avons crû voir tous ces avantages réunis dans la méthode suivante.

On propose de réduire la figure *ABCDLNT* (*fig. X. PL. 21.*) en une autre semblable & plus petite *Abcdln t*, dont le circuit soit à celui de la première :: *Ab*. *AB*, c'est-à-dire, que chaque côté de la grande soit toujours à son homologue dans la petite :: *AB*. *Ab*.

Pour y parvenir : on tracera une ligne indéfinie *AE* (*fig. Y.*), sur laquelle on portera le côté *AB* de la figure *X* de *A* en *Q* ; & de ce point *A*, avec *AQ* l'on tracera l'arc indéfini *QG*, prenant ensuite *Ab* de la figure *X*, on la portera sur l'arc *QG* de *Q* en *Z*, & par les points *AZ*, l'on mennera l'indéfinie *AS* ; ce qui donnera l'angle *EAS*,

que j'appellerai dans la suite *angle réducteur* ; où l'on voit que le rayon AQ , & la corde QZ sont les deux termes du rapport, dans lequel on veut que soient les côtés homologues de la proposée & de la réduite ; puisque (const.) AB de la figure X a été fait $\equiv AQ$ de la figure Y , & $ab \equiv QZ$. Vous avez alors tous les préparatifs de votre réduction. Car, si vous voulez placer comme il faut, dans la figure cherchée, le côté BC de la Proposée, suivant le rapport donné, vous prendrez BC avec un compas ordinaire, vous le porterez sur la figure Y de A en M , & avec AM , du point A , vous tracerez l'arc MTO ; prenant ensuite la corde MO de cet arc, vous irez au point b de la figure X décrire un arc indéfini, dont MO , soit le rayon ; & cette ligne MO donnera la vraie longueur du côté cherché de la Réduite, correspondant au côté BC de la Proposée. Et pour déterminer, dans la Réduite, la position du point C de la Proposée, vous procéderez précisément, comme vous venez de faire ; c'est à-dire que, prenant avec un compas la distance AC de la figure X , vous la porterez de A en D sur la figure Y ; & du point A , avec ce rayon AD , vous tracerez l'arc DHL entre les côtés de l'angle réducteur, comme vous avez déjà fait pour l'arc MTO ; prenant ensuite la corde DL de cet arc avec le compas, vous reviendrez en poser une des pointes à l'angle A de la figure X , pour tracer un arc, dont cette corde DL sera le rayon. Ce nouvel arc coupera le premier tracé du point b avec la corde MO , & son intersection c déterminera la position du point C de la Proposée dans la Réduite.

DÉMONSTRATION.

Car, afin d'éviter la confusion des lignes dans la

figure X, si vous imaginez les lignes AC, Ac; elles donneront les triangles ABC, Abc, qui seront équiangles. Pour le comprendre, vous n'avez qu'à vous rappeler que AB (fig. X) = AQ de la figure Y; & que Ab de la première = QZ de la seconde; pareillement que BC de la figure X = AM de la figure Y; & aussi que AC de la première = AD de la seconde. Or, il est évident, dans la figure Y, que les triangles AMO, AQZ sont équiangles; donc AM. MO :: AQ. QZ, ou (fig. X) :: AB. Ab; mais (const.) AM de la figure Y = BC de la figure X; & MO de la première = bc de la seconde: ainsi, dans la figure X, BC. bc :: AB. Ab.

Vous trouverez de même (fig. Y), que les triangles ADL, AQZ sont équiangles; & qu'ainsi AD. DL :: AQ. QZ :: AB. Ab. Or (const.) AD de la figure Y = AC de la figure X, & DL de la première = Ac de la seconde; donc :: AC. Ac :: AB. Ab; & par conséquent (fig. X) les trois côtés du triangle ABC sont proportionnels aux trois côtés du triangle Abc, chacun à chacun; l'angle B du premier est donc égal à l'angle b du second; & le côté bc a précisément la même position que le côté BC; ils sont d'ailleurs entr'eux dans la raison proposée; l'on a donc tout ce que l'on demandoit par rapport à ces deux côtés. Ce qui est incomparablement plus court à pratiquer qu'à décrire & à démontrer.

Voulez-vous avoir présentement, dans la Réduite, la grandeur & la position du côté CD de la Proposée? Prenez CD avec le compas, portez-la sur Y de A en N, & du point A, avec AN, décrivez l'arc NGK; prenez-en la corde NK, & avec cette corde, du point c de la figure X, décrivez un arc indéfini. Ensuite prenez BD dans la

même figure ; portez-la de A en R sur Y ; & avec AR, du point A , décrivez l'arc RP V ; prenez en la corde RV , & , avec cette corde , du point b de la figure X décrivez un arc , qui coupera en un point d , celui qui a été décrit du point c , avec la corde NK de la figure Y. Si vous tirez alors cd , elle sera le côté correspondant à CD. Ce qui se démontre comme le cas précédent ; & ainsi des autres.

Pour se bien conduire dans cette pratique , les Comménçans observeront que , si un côté de la Proposée est le rayon d'un arc dans l'angle réducteur , la corde de cet arc est précisément la longueur du côté correspondant dans la Réduite ; & qu'il ne s'agit plus que d'en déterminer la position , par le moyen d'un triangle.

On remarquera aussi que les lignes ponctuées de la figure X , & les cordes de la figure Y , ne doivent point se tracer dans la pratique ; elles ne paroissent ici que pour faire voir la réduction des figures en triangles , & démontrer la certitude de la méthode. Par exemple , la ligne CL n'est tracée dans la figure X que pour désigner l'ouverture du compas de C en L , afin de déterminer la position du côté DL.

Que la figure réduite soit à placer sur un autre papier & dans un autre angle de la Proposée , cela n'y fait rien ; la méthode & l'opération sont absolument indépendantes de ces circonstances.

Il ne nous reste plus qu'à donner un expédient aux Comménçans , pour les tirer d'embarras lorsqu'ils auront une figure à transformer de petit en grand. Car la méthode dont on vient de faire usage , pourroit quelquefois leur paroître impossible. Si l'on vouloit , par exemple , transformer en grand la figure *m r p f g s k* , dans le rapport de A m à A M ,

de manière que AM fût plus que le double de Am , en portant Am sur l'angle réducteur (*fig. Z*) de A en R , & traçant une circonférence avec AR , on ne pourroit pas porter le côté AM de la figure X sur cette circonférence, puisqu'il est impossible d'y porter plus que son diamètre ou le double de son rayon. On n'y portera donc que la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. de AM , selon que le permettra la grandeur de la circonférence décrite avec $AR = Am$ de la figure X . Dans le cas présent, on a porté AH , moitié de AM , de R en O (*fig. Z*), de manière que $AM = 2 RO$; & par O l'on a mené AO pour avoir l'angle réducteur RAO , dont on se servira comme ci-dessus, pour faire la transformation proposée, en ayant la simple attention de doubler les cordes qui viendront, à chaque nouvel arc que l'on tracera dans l'angle réducteur. On tripleroit, on quadrupleroit ces cordes, si on n'avoit pris que le tiers ou le quart de AM , &c. Si l'on veut avoir, par exemple, dans la Réduite $MRPFGSK$ (*fig. X*) la grandeur & la position du côté mr de la Proposée, on prendra mr avec le compas; on la portera de A en S (*fig. Z*); & avec AS , du point A , on décrira l'arc SL ; on en prendra la corde SL qu'on doublera, en faisant deux portées de compas sur une ligne droite tracée à volonté: l'ouverture du compas étant double de SL , on en mettra une des pointes en M de la figure X , & l'on tracera avec l'autre un arc indéfini, & le rayon de cet arc sera la longueur du côté de la Réduite, homologue au côté mr de la Proposée. Pour en avoir la vraie position dans la Réduite, on prendra la distance Ar dans la Proposée; on la portera de A en V (*fig. Z*) & avec AV , du point A , on tracera, dans l'angle réducteur, l'arc VT ; on en prendra la corde VT , que l'on

double, comme ci-dessus ; & avec cette corde doublée , du point A de la figure X , on tracera un autre arc indéfini qui coupera en R , celui que l'on a déjà tracé du point M , avec le double de la corde SL de la figure Z ; ce qui donnera la vraie position de MR dans la Réduire , homologue à mr de la Proposée , & telle que $MR.mr :: AM.Am$, ainsi qu'on l'a demandé. Mais il faut bien se rappeler , pour la Démonstration , que $MR (fig. X) = 2 SL (fig. Z)$, & que AR de la première $= 2 VT$ de la seconde.

D É M O N S T R A T I O N .

Il est clair (*fig. Z*) que AR est à la corde RO , comme AS est à la corde SL. Or (*const.*) $AR (fig. Z) = Am (fig. X)$; & AS de la première $= mr$ de la seconde. Donc $Am.RO :: mr.SL$, ou $Am.2 RO :: mr.2 SL$. Mais (*const.*) $2 RO (fig. Z) = AM (fig. X)$; & $2 SL$ de la première $= MR$ de la seconde ; par conséquent (*fig. X*) $Am.AM :: mr.MR$, ou , ce qui est la même chose , $MR.mr :: AM.Am$. En imaginant , dans la figure X , les lignes AR , Ar , on démontrera , comme ci-dessus , que $AR.Ar :: AM.Am$, & qu'ainsi les triangles MAR , mar , ont leurs côtés proportionnels , chacun à chacun ; d'où il suit que l'angle M $= m$; & par conséquent MR de la Réduite a la même position que mr de la Proposée : d'un autre côté ces deux lignes sont dans le rapport proposé ; l'on a donc tout ce que l'on demandoit ; & c'est en suivant cette méthode , que l'on achevera la Réduite MRPFSGK.

Quelques Praticiens renferment la figure à réduire dans un quarré ou dans un rectangle , & ils le divisent en petits quarrés ; ils font après cela , sur un autre papier , un quarré ou un rectangle

plus grand ou plus petit que le Proposé , selon qu'ils le veulent avoir ou plus grand ou plus petit ; ils divisent ce nouveau rectangle dans le même nombre de petits quarrés , que la figure à réduire : après quoi ils dessinent dans chaque petit quarré de ce nouveau rectangle , tout ce qu'ils voient renfermé dans chaque petit quarré correspondant de la figure proposée. Mais , pour être sûr de la justesse d'une pareille Réduite , il faudroit que les yeux fussent des juges aussi exacts que le compas. Cette méthode n'est donc qu'une approximation , & doit être absolument rejetée en Géométrie , à moins qu'on ne lui en associe quelque autre qui en corrige l'incertitude.

Pour réduire un plan de grand en petit , il n'est pas nécessaire d'avoir tous les côtés de la figure que l'on veut réduire ; il suffit d'en connoître quelques lignes & les angles formés sur cette ligne , comme nous allons le faire voir , en exposant la méthode de lever le plan d'une campagne , d'un pays , &c. ce qui n'est qu'une pure réduction de grand en petit. Or , lever le plan d'un pays , & en faire la Carte , c'est représenter sur le papier tous les endroits remarquables , comme les montagnes , les rivières , les châteaux , les grands chemins , les villages , &c. que ce pays contient. Il n'est point question ici de la Carte générale d'un grand Royaume , où l'on a coutume de faire usage des connoissances Astronomiques. On se propose seulement de faire voir que par le simple secours des triangles proportionnels , on peut lever tout un pays , montrer la situation de ses différentes parties , faire connoître le rapport de leurs distances ; en sorte que la seule vue d'un plan d'une campagne puisse faire juger sûrement de la disposition & de l'éloignement réciproque des différents endroits , que l'on juge à propos d'y repré-

enter. Car c'est au dessein à en montrer les élévations & les enfoncemens par le moyen de la lumière & des ombres.

PROBLÈME

333. Lever le plan ou faire la Carte d'un pays ou d'une campagne , telle que la représente la figure ABCD, &c. (*fig. 111.*)

RÉSOLUTION.

On choisira une ligne ou une distance OP (a), la plus grande que l'on pourra , sur les extrémités de laquelle on fera les opérations que je vais décrire. Il faudra placer horizontalement le Graphomètre à l'une des extrémités O , & aligner son diamètre à l'autre extrémité P , où l'on doit avoir planté un piquet. Après cela , on visera aux points A , B , C , D , F , G , H , & on marquera avec beaucoup d'attention les angles AOP , BOP , COP , &c. que les rayons visuels OA , OB , OC , &c. menés aux points A , B , C , &c. feront avec la base OP. On transportera ensuite l'instrument à l'autre extrémité P de la base OP ; on le placera toujours bien horizontalement , & l'on allignera son diamètre au point O : ensuite avec l'alidade ou la règle mobile on visera , comme ci-dessus , aux mêmes points A , B , C , &c. on marquera , avec la plus grande exactitude possible , les angles que les rayons visuels , dirigés à ces points , feront au point P de la base OP.

Nous n'avons point parlé des points EK , parce que les angles qu'ils font avec la base OP sont trop obtus ; mais , voici comment on les déterminera. Pour le point E , on se servira de la ligne DP. Sur les

(a) Cette ligne OP est ordinairement appelée *base*.

extrémités D, P, on prendra la valeur des angles DPE, PDE.

Prenant ensuite A O pour base, afin de déterminer le point K, on travaillera à connoître les angles OAK, KOA, que l'on écrira avec soin. Enfin on mesurera la base OP, que je suppose de 500 toises.

Toutes ces opérations finies, on peut construire à son aise sur une Carte le plan dont on a besoin : car l'on a présentement tout ce qu'il faut pour cela. On prendra donc une ligne op que l'on divisera en 500 petites parties. Elle représentera la grande base OP de 500 toises, prises sur le terrain, & de plus elle pourra servir d'échelle pour mesurer la distance réciproque des différens endroits, qui doivent être représentés sur la Carte. On fera ensuite aux extrémités o, p de cette petite ligne, les mêmes angles que l'on aura trouvés sur la grande base OP, c'est-à-dire, que l'on fera les angles $aop = AOP, bop = BOP, cop = COP, dop = DOP$; & puis $opa = OPA, opb = OPB, opc = OPC, opd = OPD$; ce qui déterminera les lieux a, b, c, d , sur la Carte, aussi-bien que la distance pd , aux extrémités p, d , de laquelle on fera les angles dpe, pde , égaux aux angles DPE, PDE, faits sur la ligne PD du terrain; les côtés pe, de de ces angles, détermineront par leur intersection le point e correspondant à l'endroit E sur le terrain. On continuera de faire les angles $opf = OPF, opg = OPG, oph = OPH$; ensuite $pos = POF, pog = POG, poh = POH$: ces angles détermineront par l'intersection de leurs côtés, les lieux f, g, h , & il ne restera plus que le point k à trouver. On agira à son égard, comme l'on a fait par rapport au point e , c'est-à-dire, que sur la ligne oa qui a été déterminée, on fera les angles aok ,

oak égaux, chacun à chacun, aux angles AOK , OAK formés sur la distance OA ; l'intersection des côtés ok , ak , déterminera le point k du plan, & la Carte sera achevée.

DÉMONSTRATION.

Il faut prouver que tous les points a , b , c , &c. trouvés, ainsi que nous venons de l'enseigner, représentent non-seulement la situation des lieux A , B , C , &c. les uns à l'égard des autres, mais encore leurs distances réciproques.

Nous avons dit que les figures semblables étoient celles dont tous les angles étoient égaux, chacun à chacun, & les côtés des angles correspondans proportionnels : or c'est ce que nous avons exécuté en construisant la petite figure $abcde$, &c. puisque tous les triangles qui la composent, sont semblables à tous les triangles dont est composée la grande figure du terrain, chacun à chacun. Ce que je vais faire voir, en prenant seulement les deux triangles correspondans aop , AOP , parceque tous les autres ont été construits de la même façon.

Il est certain (n°. 285.) que deux triangles sont semblables, quand deux angles de l'un sont égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun : or tels sont les triangles aop , AOP , puisque (par la const.) l'angle $aop = AOP$, & l'angle $opa = OPA$; donc le troisième angle est égal au troisième angle, & les deux triangles sont équiangles; par conséquent ils ont leurs côtés proportionnels. Si vous dites la même chose des autres triangles correspondans, vous concevrez aisément que la petite figure de la Carte est un modèle du terrain que l'on s'est proposé de représenter.

Ainsi, quand on voudra sçavoir la distance d'un endroit à l'autre, par exemple, de A en B , on

prendra avec un compas la distance ab ; on la portera sur la ligne op qui sert d'échelle, à cause que nous l'avons divisée en 500 petites parties; & l'on jugera, par le nombre des parties que la ligne ab prendra sur l'échelle, de la distance du point A au point B.

Car, supposons que ab contienne 130 petites parties de la base ou de l'échelle op ; je dis que la distance du lieu A au lieu B = 130 toises. Vous n'avez qu'à considérer les deux triangles $ao b$, $AO B$; il est aisé de prouver que ces deux triangles sont semblables, ou que les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés de l'autre: car, 1°. (par la construction) l'angle $aop = AOP$, & l'angle $bop = BOP$; donc $aop - bop (aob) = AOP - BOP (AOB)$; l'angle aob est donc égal à l'angle AOB .

Mais de plus, les deux triangles apo , $AP O$ semblables (par la construction) donnent $op. OP :: oa. OA$: par la même raison les deux triangles semblables bpo , BPO donnent aussi $op. OP :: ob. OB$; & comparant cette dernière proportion avec la première, on voit que $oa. OA :: ob. OB$, puisque les deux rapports de cette proportion sont égaux au rapport de op à OP .

Donc, 2°. les côtés oa , ab de l'angle aob , sont proportionnels aux côtés OA , AB de l'angle $AOB = aob$: or (n°. 284.) deux triangles sont semblables, quand ils ont un angle égal & les côtés qui forment cet angle proportionnels. Par conséquent les deux triangles aob , AOB sont semblables; donc les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels; ainsi $ab. AB :: ao. AO$: or $ao. AO :: op. OP$; donc $ab. AB :: op. OP$. Mais op (supp.) représente OP ; par conséquent ab représentera AB : ainsi les 130

parties de ab feront l'expression des 130 toises contenues dans la longueur AB .

Cette méthode est donc très-propre à faire connoître la distance réciproque des lieux qu'on lève sur le terrain.

334. J'ai dit qu'il ne falloit pas prendre des angles trop obtus, ni par conséquent des angles trop aigus; c'est que la même erreur, commise en prenant des angles très-aigus ou très-obtus, produit un inconvénient beaucoup plus considérable, qu'il ne le seroit en prenant des angles d'une grandeur moyenne.

Pour en avoir une preuve bien sensible, supposons que du point O (*fig. 107.*) l'on voie la distance Ab sous l'angle BOA , qui est passablement aigu; & que du même point O la distance $AB = Ab$ soit vue sous l'angle très-aigu BOA . Il est évident que si l'angle BOA est pris trop grand de la quantité BOx , l'erreur que l'on commettra sur la longueur Ab , sera exprimée par bx ; mais si on fait la même faute en prenant l'angle BOA , c'est-à-dire, qu'on le prenne trop grand de la quantité $BOx = BOx$, l'erreur sera BS incomparablement plus grande que bx ; ce que je laisse à démontrer rigoureusement à ceux qui ne seront pas assez convaincus par le témoignage des sens.

335. Nous avons aussi fait observer que le Graphomètre devoit être placé très-horizontalement, afin que les endroits qu'on lève, se trouvant toujours dans un plan parallèle à l'horison, soient aussi toujours à égale distance, soit que l'on vise à des points de ces objets plus hauts, soit que l'on aligne à des points plus bas. Imaginez-vous que la ligne AB (*fig. 108.*) soit une ligne horizontale au-dessus de laquelle s'élèvent verticalement les objets AS , BO . Du point x élevé au-dessus du point A , où

est placé le pied de votre Graphomètre, visez horizontalement à un point y de l'objet BO : transportez ensuite votre instrument au point B ; disposez-le horizontalement, & supposons qu'il s'élève jusqu'au point z plus haut que le point y . De ce point z visez à l'objet AS : le rayon visuel zr rencontrera un point r plus haut que le point x de l'objet AS ; mais cela ne changera en rien la distance de l'objet AS à l'objet BO : car, à cause du parallélisme des lignes AB , xy , cette distance sera toujours la même, soit qu'on la prenne sur xy ou sur rz , puisque $xy = rz$.

Cependant ce que nous venons de dire, ne peut regarder que des objets qui sont peu élevés au-dessus de l'horison. S'il falloit aussi marquer sur la Carte la distance d'une haute montagne à une base quelconque, on s'y prendroit de la manière suivante.

PROBLÈME.

336. Déterminer la distance d'une montagne MS aux points O , P de la base OP . (*fig. 109.*)

RÉSOLUTION.

On placera, comme ci-dessus, le Graphomètre successivement aux points O , P , & son diamètre horizontalement dans la direction de la base OP ; alors on fera hausser le plan du Graphomètre jusqu'à ce que l'on apperçoive le sommet M de la montagne dans la direction de l'alidade, c'est-à-dire, que le plan du Graphomètre prendra une inclinaison telle que, si on le prolongeoit, il passeroit par le sommet M de la montagne. L'instrument dans cette situation fera connoître les angles MOP , MPO , lesquels, rapportés aux extrémités o , p de la petite base op de la Carte, donneront, par l'intersection

section de leurs côtés les distances om , pm du sommet m de la montagne aux points o , p de la base op ; puisque les triangles MOP , mon étant équiangles, leurs côtés homologues sont proportionnels; & par conséquent om représentera OM , & pm répondra à la distance PM sur le terrain.

Mais OM n'est pas la distance de la montagne au point O , ni PM celle de la même montagne au point P . Représentez-vous une verticale MS , ou une ligne qui tombe du sommet M perpendiculairement à l'horison. Si des points O , P vous imaginez les horizontales OS , PS , qui soient par conséquent perpendiculaires à la verticale MS , ces horizontales marqueront la véritable distance de la montagne aux points O , P ; parce que la distance d'un point à un objet, doit nécessairement s'estimer par la perpendiculaire menée de ce point sur la longueur de l'objet. (n°. 37.)

Ce sont donc les distances OS , PS que nous avons à déterminer. Pour cela, aux points O , P , on disposera verticalement le plan du Graphomètre, dont le diamètre doit être horizontalement dirigé vers la montagne, afin de pouvoir prendre les angles MOS , MPS , que les lignes MO , MP font avec les horizontales OS , PS ; alors dans les triangles rectangles OMS , PMs , vous connoîtrez tout ce qui est nécessaire pour déterminer sur la Carte, non seulement les distances OS , PS , mais encore la verticale MS : car en faisant l'angle $mos = MOS$, & l'angle $mps = MPS$, l'intersection des deux côtés os , ps donnera le point s de la verticale ms ; ainsi les lignes os , ps , ms de la Carte feront connoître les distances OS , PS & la hauteur MS imaginées sur le terrain. Ce qui est évident, puisque les triangles de la petite figure sont semblables à ceux de la grande, chacun à chacun.

est placé le pied de votre Graphomètre
 horizontalement à un point y de l'objet
 portez ensuite votre instrument au
 sez-le horizontalement, & sup
 jusqu'au point z plus haut que le
 & visez à l'objet AS : le rayon
 un point r plus haut que le
 mais cela ne changera en
 AS à l'objet BO : car
 lignes AB , xy , ce
 même, soit qu'on la
 que $xy = rt$.

Cependant ce rectangle OSM . Vous
 regarder que de méthode, la longueur du
 de l'horison. S , en décrivant un cercle sur
 la distance d' du triangle rectangle psm &
 conque, or p l'angle spm égal à l'angle SPM
 terrain: car le côté ps se trouvera
 par la circonférence du cercle.

336. deux côtés os , ps une fois trouvés, il sera
 aux de les disposer sur la base op (fig. 110) dans
 position qui leur convient; puisqu'il ne fera plus
 question que de faire un triangle avec les trois
 lignes op , os ; ps ; & le point s sera placé sur la
 Carte où il doit être.

337. Il n'est pas toujours nécessaire d'établir
 une base sur le terrain pour déterminer la distance
 de certains endroits à un point donné. Si l'on con-

(a) *Représentation perspective*, c'est à dire, une représentation des
 objets tels qu'ils paroissent aux yeux; & non pas tels qu'ils sont en
 effet; cela vient de ce que l'on est obligé de tracer sur un plan des
 lignes qui sont dans différens plans, lorsqu'on les considère en na-
 ture: d'où il arrive souvent qu'un angle, représenté sur le papier,
 est renfermé dans un autre, qui est pourtant plus petit que lui, pris
 sur le terrain. Afin que les Commencans conçoivent comment cela
 peut se faire, il est à propos de disposer des objets de manière qu'ils
 produisent aux yeux les effets dont nous venons de parler. On leur fera
 remarquer comment les lignes qui forment des angles, viennent s'ex-
 tending sur le papier, c'est à dire, sur le Tableau où elles se représentent.

exemple, la distance de A en B, (fig. 112) de D en A, & qu'étant placé au point C, d'où les objets A, B, D sont vus, savoir combien on est éloigné de la base, en mesurant les distances AB, BD, DA. On peut facile de les représenter par le triangle semblable ABC, qui se construit sur une échelle, dont les parties pour chaque côté qu'il faut mesurer dans chaque distance correspon-

dra ensuite que du point C donné sur le terrain, on peut connaître les angles ACD, BCD (fig. 112), dont les côtés AD, AB sont les bases; par conséquent, si dans le triangle abd (fig. 113.) je puis trouver un point o, d'où tirant les lignes oa, ob, od, l'angle aod, opposé au côté ad, soit égal à l'angle ACD, opposé à la distance AD correspondante, & l'angle aob soit égal à l'angle ACB opposé au côté AB, représenté par le petit côté ab, il est certain que le point o sera déterminé dans la Carte, de même que le point C l'est sur le terrain, ainsi que je le démontrerai rigoureusement plus bas.

Mais ad peut être considéré comme la corde d'un cercle qui passeroit par les trois points a, o, d; & cette corde retranche un segment capable de l'angle aod = l'angle ACD donné. De même le côté ab peut être aussi considéré comme la corde d'un cercle, dont la circonférence passe par les trois points a, o, b; d'où l'on voit que cette corde ab retranche un segment capable de l'angle aob = l'angle ACB donné; le point o d'intersection des deux circonférences est donc le point qui satisfait à la question. Ainsi le Problème se réduit à cons-

truire sur une ligne donnée un segment de cercle capable d'un angle donné.

PROBLÈME.

338. Sur la ligne donnée ab (*fig. 114*) construire un segment de cercle capable de l'angle donné M , c'est à-dire, construire un segment dans lequel on puisse inscrire un angle égal à l'angle donné M .

RÉSOLUTION.

Au point a de la ligne ab (*fig. 114*) faites l'angle bas égal à l'angle donné M . Au même point a sur le côté indéfini as élevez la perpendiculaire ao , que vous prolongerez jusqu'à ce qu'elle coupe, au point o , la perpendiculaire to élevée sur le milieu de la ligne ab donnée. De ce point o avec le rayon oa décrivez une circonférence de cercle, laquelle passera nécessairement par les points a, b , produira le segment axb , dans lequel on pourra inscrire un angle égal à l'angle donné M .

DÉMONSTRATION.

D'un point quelconque x du segment axb tirez les cordes xa, xb , afin d'avoir l'angle axb inscrit dans le segment trouvé; il s'agit de prouver que cet angle est égal à l'angle donné M : or c'est ce qui est évident. Car, puisque (par la const.) ao est perpendiculaire sur as , la circonférence décrite du point o avec le rayon ao touche la ligne as (n°. 105); par conséquent l'angle $axb =$ l'angle bas , parce que chacun de ces angles a pour mesure la moitié du même arc ab qui passe entre ses côtés (n°. 103 & 105.); mais (par la const.) l'angle $bas = M$; donc l'angle axb est aussi $= M$, & par con-

séquent l'on a construit sur la ligne ab un segment de cercle capable de l'angle donné M , ainsi qu'on le demandoit ; C. Q. F. D.

Je ne crois pas , 1^o. qu'il soit nécessaire de prouver que les perpendiculaires ao , to doivent se rencontrer : on voit bien que l'angle oas étant droit, l'angle oab est aigu, & qu'ainsi oa s'incline sur ab vers la perpendiculaire to , qu'il doit enfin rencontrer.

2^o. On comprend assez, sans que j'en avertisse, que la circonférence décrite du point o avec le rayon oa , doit passer par l'autre point b de la ligne donnée ab ; puisque (par la const.) tous les points de la perpendiculaire to sont à égale distance des points a , b .

Revenons présentement à la figure 113. Après avoir construit, comme nous l'avons dit, le petit triangle abd , semblable au grand triangle ABD , sur le côté ad on construira un segment de cercle capable de l'angle donné ACD , & sur le côté ab on construira de même un segment de cercle capable de l'angle donné ACB ; ces deux cercles se couperont au point o cherché. Ainsi en tirant les lignes oa , ob , od , & les portant sur l'échelle qui a servi à la construction du triangle abd , elles feront connoître les distances CA , CB , CD , que l'on se proposoit de découvrir ; ce qui ne paroît pas avoir besoin d'autre démonstration.

Mais comme les vraisemblances & la déposition des sens sont des rémoins qu'on réfuse fort souvent en Géométrie, on va démontrer rigoureusement, que les lignes ao , od , ob du plan sont proportionnelles aux distances CA , CD , CB que l'on veut connoître.

DÉMONSTRATION.

Par les points A, C, B de la figure 112 imaginez la circonférence $ACBFA$, ainsi qu'on en a fait passer une par les points a, o, b de la figure 113. Prolongez DC jusqu'à la rencontre de la première en F , & menez les cordes FA, FB ; de même, prolongez do jusqu'à la rencontre de la seconde circonférence en f , & menez aussi les cordes fa, fb . Après cela, vous trouverez que les triangles ABF, abf sont équiangles. Car (par la const.) les angles ACD, aod étant égaux, leurs supplémens ACF, aof le seront aussi; &, par la même raison, l'angle $BCF = bof$. Mais l'angle $ABF =$ l'angle ACF , parce qu'ils ont leur sommet à la circonférence, & qu'ils sont appuyés sur le même arc AF . Par la même raison l'angle $abf = aof$; donc, puisque $ACF = aof$, ainsi qu'on vient de le voir, on aura $ABF = abf$. Si l'on fait le même raisonnement, on s'apercevra que l'angle $BCF = BAF$, & aussi que l'angle $bof = baf$: mais on a vu que $BCF = bof$; donc $BAF = baf$. Ainsi les triangles ABF, abf sont équiangles; ce qui donne $AF.af :: AB.ab$; mais (const.) $AB.ab :: AD.ad$; donc $AF.af :: AD.ad$. De plus l'angle $DAF = daf$. Car $DAB = dab$ (const.), & l'on vient de voir que $BAF = baf$; ainsi les deux triangles DAF, daf sont équiangles (n°. 284.), c'est-à-dire que l'angle $ADF = adf$; ce qui rend aussi semblables les deux triangles DCA, doa , à cause de l'angle $ACD = aod$ (supp.); donc $AD.ad :: AC.ao :: CD.od$, & aussi $CB.ob$ (à cause des triangles équiangles DCB, dob); & c'est tout $C. Q. F. D.$

Le point C de la Fig. 112 pouvant être situé sur quelqu'un de ses côtés ou au dehors, j'en détaillerai toutes les circonstances dans la Trigonométrie par les sinus, qui est à la fin de cet Ouvrage.

Les Problèmes précédens ont dû nous convaincre suffisamment de l'extrême utilité des triangles semblables, soit dans les recherches, où l'on se propose de faire quelques découvertes, soit dans l'application de la Géométrie aux Arts de la société, qui sont aux hommes une source perpétuelle de commodités & d'agrémens; c'est pourquoi nous allons terminer ce Livre par deux Problèmes dont l'usage est assez fréquent.

PROBLÈME.

339. Couper une ligne AB en parties proportionnelles aux parties DC, CF, FG, &c. de la ligne DG. (fig. 115.)

RÉSOLUTION.

Avec la ligne DG faites le triangle équilatéral DOG; du point O portez la ligne AB de O en A & B sur les côtés OD, OG: tirez AB. Après cela menez aux points de division C, F, les lignes OC, OF. Ces lignes couperont la ligne AB en parties AM, MT, TB, proportionnelles aux parties DC, CF, FG de la ligne DG; c'est à dire, que l'on aura $AM : DC :: MT : CF :: TB : FG$.

DÉMONSTRATION.

Le triangle ODG est équilatéral, (par la const.) & de plus $OA = OB$; par conséquent les points A, B sont également éloignés de la ligne DG; donc AB est parallèle à la base DG: ainsi (n°. 280)

OD.DG::OA.AB: or OD= DG; donc OA=AB, c'est-à-dire, que la parallèle est précisément égale à la ligne qu'il s'agit de diviser.

Mais, à cause du parallélisme des lignes DG, AB, AM. DC::OM.OC::MT.CF::OT.OF::TB.FG. Donc AM.DC::MT.CF::TB.FG; C.Q.F.D.

Enfin, comme nous avons souvent parlé d'échelles, nous ne devons pas supprimer la manière d'en construire qui représentent des toises, des pieds, des pouces, des lignes, &c. Dans l'Arpentage on néglige les lignes, & même quelquefois les pouces.

PROBLÈME.

340. Construire une échelle qui représente des toises, des pieds, des pouces. (*fig. 116.*)

RÉSOLUTION.

Supposons que l'on demande une échelle de 4 toises, où les pieds & les pouces soient marqués. Prenez une ligne AB que vous diviserez en cinq parties égales. Les quatre premières parties, en allant de gauche à droite, seront destinées à représenter chacune une toise, & l'on divisera la dernière partie en 6, pour avoir les 6 pieds compris dans une toise. Il faut présentement trouver les pouces, c'est-à-dire, les douzièmes parties de la petite ligne qui représente un pied. Afin d'y parvenir, au point B on élèvera une perpendiculaire BD indéfinie, sur laquelle on prendra douze parties égales à volonté; après quoi on achèvera le parallélogramme ABCD. Par les points de division on tirera des verticales & des horizontales. Enfin on mènera les diagonales 65, 54, 43, &c. & l'échelle sera achevée.

L'usage de cette échelle est assez simple. Voulez-vous prendre sur cette échelle 3 toises, 5 pieds, 7 pouces ? Mettez une des pointes du compas sur la verticale *l* au point *r*, où l'horizontale *77* coupe cette verticale. Ouvrez le compas jusqu'à ce que vous rencontriez sur cette horizontale la verticale *55* ; cela vous donnera 3 toises, 5 pieds : ouvrez encore le compas jusqu'à l'intersection *s* de cette même horizontale & de la diagonale *65* ; je dis que la longueur *rs* contient 3 toises, 5 pieds, 7 pouces de l'échelle.

DÉMONSTRATION.

Il est d'abord évident que *rs* contient 3 toises, 5 pieds depuis *r* jusqu'en *t* : car il n'y a qu'à compter. Reste à prouver que la petite ligne *ts* vaut 7 pouces. Remarquez que les deux triangles *556*, *5 ts* sont semblables ; donc $5t.55 :: ts.56$. Or *5t* contient $\frac{7}{12}$ parties de la ligne verticale *55* ; donc aussi *ts* contient $\frac{7}{12}$ parties de la ligne *56*, qui vaut 12 pouces ; c'est-à-dire, que $ts = 7$ pouces ; par conséquent la ligne $rs = 3$ toises, 5 pieds, 7 pouces de l'échelle.





LIVRE IV, OU L'ON TRAITE DE LA MESURE DES SOLIDES.

CHAPITRE PREMIER.

Génération des Solides. Evaluation de leurs surfaces.

341. **O**n appelle *Solide* en Géométrie tout corps évalué selon ses trois dimensions. Il y a plus de deux mille ans qu'Archimède (un des plus profonds Géomètres qui aient jamais existé) a découvert toute la doctrine des Solides. Ceux qui sont venus après lui n'ont eu à simplifier que quelques démonstrations. Le génie de cet homme extraordinaire n'avoit rien laissé à trouver là dessus ; il a même été au-delà de nos besoins.

Je vais exposer le plus clairement qu'il me sera possible la sublime Théorie sur laquelle est fondée la mesure des Solides. Nous ne croyons pas qu'il y ait pour cela de méthode plus lumineuse que celle de les engendrer suivant certaines conditions. En voyant ce qui entre dans la composition d'un Solide, on est beaucoup plus en état d'en déduire les propriétés.

342. Représentez-vous que le plan ABC (*fig.*

117) triangulaire coule parallèlement à lui-même le long de la ligne CD verticale. Si ce plan laissoit une trace de sa figure à chaque point où il arrive, il est évident qu'il en naîtroit le corps ou le solide ABCDGH, que l'on appelle en général un *Prisme* ; mais le Prisme reçoit des noms différens selon la différence des plans générateurs. On l'appelle *Prisme triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, &c. selon que la figure génératrice est un Triangle, un Quadrilatere, un Pentagone, &c.

On dit aussi qu'un Prisme est *droit*, quand la ligne DC, sur laquelle il a été engendré, est perpendiculaire au plan qui lui sert de base ; mais on l'appelle *oblique*, lorsqu'il s'incline sur sa base.

Un Prisme est donc un corps qui a dans toute son étendue une grosseur égale, dont les bases supérieures & inférieures sont semblables, égales & parallèles : il est entouré de faces parallélogrammes, quand son plan générateur est une figure d'un nombre de côtés déterminé.

343. Si le plan générateur est un parallélogramme, le solide engendré est nommé *Parallélipède* : telle est la figure OGPM S (fig. 118.) dont les faces opposées sont des parallélogrammes égaux, semblables & parallèles.

344. Le Parallélipède prend le nom de *Cube*, lorsque sa base est un carré, & que sa hauteur est égale au côté du carré. On suppose toujours que le plan générateur s'élève perpendiculairement de dessus sa base. Voyez la figure 119.

Les corps que nous venons de définir sont tous les jours devant nos yeux. Un dé à jouer est un cube : un livre, une poutre, une règle ont à peu près la forme d'un parallélipède. Les carreaux hexagones, avec lesquels on carrelé les appartemens, sont de vrais Prismes.

Il faut pourtant convenir que, sans le secours de l'Art, la nature ne nous fournit gueres de modeles bien exacts de ces especes de solides ; mais tel a été le génie des premiers Inventeurs : ils ont imaginé des solides d'une mesure commode , afin d'y pouvoir rapporter ensuite les corps les moins uniformes dans leurs dimensions.

P R O B L Ê M E.

345. Déterminer la surface du Cube , du Parallélipede , du Prisme.

R É S O L U T I O N.

1°. Par la génération du Cube (*fig. 119*) ce Solide est terminé par six faces égales qui sont des quarrés. Ainsi , après avoir mesuré l'une de ses faces , on en multipliera l'aire par 6 , & ce dernier produit exprimera la surface totale du Cube.

2°. Remarquez aussi que le Parallélipede a six faces , dont les opposées sont égales. (*fig. 118.*) Cherchez donc la superficie des faces $OGDT$, $TDMS$, $GPM D$; faites-en la somme , & multipliez-la par 2 : vous aurez la surface totale du Parallélipede.

3°. Quant à la surface du Prisme , (*fig. 117.*) on est sûr d'abord par la génération de ce Solide , que la base supérieure ABC est égale à la base inférieure HGD . On prendra donc la mesure de l'une de ses bases que l'on doublera. Après cela on comptera les côtés du plan générateur ; le nombre de ces côtés indiquera celui des parallélogrammes qui entourent le Prisme. Ces Parallélogrammes enveloppans seront tous égaux , si le Polygone générateur est régulier : ainsi la connoissance de l'un de ces Parallélogrammes les fera connoître tous ; mais il faudra prendre séparément la mesure de chacun d'eux ,

en cas que la figure génératrice ait tous ses côtés intégraux. L'aire de tous les Parallélogrammes réunis, jointe à celle des deux bases, donnera la surface totale du Prisme.

Il ne faut qu'un coup d'œil pour concevoir tout ceci, quand on a des Solides réels devant les yeux. Il est donc à propos que l'on s'en fournisse. On verra même qu'ils sont absolument nécessaires à l'intelligence de certaines figures qu'il est presque impossible de représenter sur le papier.

346. Soit le Parallélogramme rectangle CBDF (fig. 120.) élevé verticalement sur un plan. Supposez que ce rectangle tourne autour de son côté fixe FC qui lui sert de charnière. En faisant sa révolution, il engendrera un corps rond d'une égale grosseur dans toute son étendue, & dont les deux bases supérieure & inférieure seront deux cercles égaux, qui auront pour rayon le côté CB ou FD = CD. Cette espèce de Solide s'appelle un *Cilindre*. Une canne, une colonne, également grosses dans toute leur longueur, sont de vrais cylindres.

On nomme *axe* du cylindre la ligne FC, qui joint les centres F, C des deux cercles qui peuvent servir de base au cylindre. Quand l'axe est perpendiculaire à la base, on dit que le cylindre est *droit*; mais qu'il est *scalene* ou *oblique*, si son axe est incliné sur la base; & alors la génération n'est pas la même. On peut le concevoir engendré par un cercle qui coule parallèlement à lui-même le long d'une ligne oblique au plan qui lui sert de base.

On voit par la génération du cylindre, que ce Solide a une surface composée, pour ainsi dire, de trois pièces. Il est terminé par deux cercles égaux qui sont deux surfaces planes, & sa longueur est entourée d'une surface courbe, que nous appelons *la surface convexe*.

P R O B L È M E.

347. Trouver la surface d'un cylindre droit.
(fig. 120.)

R É S O L U T I O N.

1°. On trouvera, ainsi qu'il a été enseigné (n°. 201), la surface des deux bases circulaires.

2°. Multipliez la circonférence de l'une des bases circulaires par la hauteur DB du cylindre, vous aurez la surface convexe; vous l'ajouterez à la surface des deux bases circulaires, ce qui produira la surface totale du cylindre.

D É M O N S T R A T I O N.

Il s'agit uniquement de faire voir que la surface convexe d'un cylindre est égale au produit de la circonférence de l'une de ses bases par sa hauteur. Rappelez-vous que le cercle est un Polygone régulier d'un très grand nombre de côtés si petits, qu'il est impossible de les discerner, mais dont l'existence est néanmoins très réelle. On peut donc supposer que la surface convexe du cylindre est divisée en un très grand nombre de Parallélogrammes rectangles $abdf$ de même hauteur que le cylindre, & si étroits que leur convexité ne diffère en rien d'une surface plane (a). Or on détermineroit la surface du petit

(a) Je prie les Lecteurs délicats de ne point perdre patience. Il y en aura sans doute quelques uns qui s'imagineront de nous voir toujours supposer que la circonférence d'un cercle peut être considérée comme un Polygone régulier. Il ne nous est pas possible de les satisfaire encore. Quand nous aurons exposé les principes de la méthode d'exhaustion, dont nous ferons usage pour démontrer les Solides, nous sommes persuadés qu'ils ne leur restera aucun scrupule à cet égard. J'aurois souhaité pouvoir me dispenser de certaines expressions un peu trop vagues, & qui ne paroissent point devoir être souffertes dans les sciences précises; mais je n'ai pris cette liberté qu'afin de ne pas jetter à l'abîme les Commencans dans une trop grande contention; on reconnoitra bien par la suite que je les ai ménagés sans les flatter.

Parallélogramme rectangles $abdf$, en multipliant la petite base fd par la hauteur $bd = BD$, hauteur du cylindre; par conséquent comme les petits rectangles $abdf$, qui composeroient ensemble la surface convexe du cylindre, auroient pour base totale l'une des circonférences des bases circulaires du cylindre, & pour hauteur commune celle du cylindre, il s'ensuit que l'on auroit la surface de tous ces petits Parallélogrammes, c'est-à-dire, la surface convexe du cylindre, en multipliant la circonférence de l'une de ses bases par la hauteur du cylindre, ainsi qu'on l'a exécuté.

348. La Résolution de ce Problème nous fait voir que la surface convexe d'un cylindre est égale à celle d'un Parallélogramme rectangle, dont l'un des côtés seroit égal à la circonférence de l'une des bases circulaires du cylindre, & l'autre côté égal à la hauteur du cylindre.

349. Si l'on faisoit couler le cercle ACB toujours parallèlement à lui-même le long de l'axe perpendiculaire EG (fig. 120), ce mouvement produiroit encore un cylindre droit, comme ci-dessus (n°. 346.) Cette dernière génération du cylindre est fort propre à faire concevoir que ce Solide n'est pas différent du Prisme, dont le plan générateur est un Polygone régulier d'un très grand nombre de côtés, qui réduisent par conséquent la surface convexe du cylindre à une très grande multitude de petits Parallélogrammes plans qui la composent (n°. 347.).

350. Si du sommet D d'une ligne élevée perpendiculairement au-dessus de la base ABC , (fig. 121.) on imagine une autre ligne DC inclinée, dont l'extrémité C parcourt le Périmètre CBA , tandis que son autre extrémité est fixée au point D ; le mouvement de cette ligne engen-

drera une surface pyramydale, dont le Solide est appelé *pyramide*.

Puisque toutes les faces de ce Solide vont se réunir en un point, il est évident que la surface de la pyramide n'est composée que de faces triangulaires. On ne fait point ici mention de la base sur laquelle elle s'appuie.

Les différens polygones qui peuvent servir de base à la pyramide, lui donnent différens noms; elle est dite *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, *hexagonale*, &c. selon que sa base est un triangle, un quadrilatere, un pentagone, un hexagone, &c.

351. Mais quand la base est un cercle (*fig. 122.*), alors la pyramide est appelée *cône*. La ligne DO menée du sommet D au centre O du cercle, est l'*axe* du cône. Si cet axe est perpendiculaire sur le plan du cercle, le cône est *droit*, autrement il est *scalene* ou *oblique*. La ligne génératrice DC, ou toute autre ligne droite menée du sommet D à un point quelconque de la circonférence de la base, s'appelle le *côté* du cône.

352. Coupez le cône par un plan ST parallèle à la base, enlevez-en la partie supérieure DST, il restera la partie inférieure SMCT, que l'on appelle *cône tronqué*.

PROBLÈME.

353. Mesurer la surface d'une pyramide (*fig. 121.*). Il ne s'agit point de la surface de la base.

RÉSOLUTION.

1°. Pour avoir la surface d'une pyramide DABC, on prendra la surface de tous les triangles qui entourent cette pyramide.....

On

ÉVALUATION DE LEURS SURFACES. 273

On observera que la hauteur de ces triangles n'est pas la même que celle de la pyramide, qui se mesure par une ligne qui tombe à-plomb du sommet D ; au lieu que la hauteur des surfaces triangulaires est une ligne inclinée comme ces faces , & menée perpendiculairement sur un côté du périmètre de la base.

2°. Si la pyramide est droite , & que la base soit un Polygone régulier , toutes les faces triangulaires de cette pyramide seront égales ; elles seront de même hauteur & de même base : on en aura donc la surface totale , en multipliant le circuit ou le périmètre de la base de la pyramide par la moitié de la perpendiculaire abaissée du sommet D sur l'un des côtés du périmètre.

Remarquez que cette perpendiculaire n'est pas différente du côté DC de l'une des faces triangulaires , quand les côtés du Polygone régulier sont très petits ; les faces triangulaires deviennent alors si étroites , que la perpendiculaire se confond avec les deux côtés du triangle isoscèle D B C.

P R O B L Ê M E.

354. Trouver la surface du cône MDC. (*fig. 22.*)

R É S O L U T I O N.

Multipliez la circonférence de la base par la moitié du côté DC de ce cône. Ce produit vous donnera la surface du cône DMC.

D É M O N S T R A T I O N.

Nous venons d'observer que la base de la pyramide étant un Polygone régulier , on en a vu la surface totale , en multipliant le périmètre de sa base par la moitié de la perpendiculaire, abaissée :

du sommet sur l'un des côtés du périmètre, & que cette perpendiculaire n'étoit pas différente du côté DC , quand les côtés du Polygone régulier étoient très petits. Or c'est-là précisément le cas d'un cône DMC ; puisque le cercle est un Polygone régulier d'un très grand nombre de côtés, si petits que les faces triangulaires du cône deviennent insensibles, quoique réellement existantes, ainsi que l'indique le petit triangle Dxy .

On auroit de même la surface du cône, en multipliant la moitié de la circonférence de sa base par son côté entier DC .

COROLLAIRE I.

355. Donc, si l'on construit un triangle rectangle dcm (fig. 123.) dont la base cm soit égale à la circonférence de la base circulaire du cône, & la hauteur dc égale au côté du même cône, ce triangle rectangle sera égal à la surface convexe du cône.

COROLLAIRE II.

356. Par conséquent en retranchant de la hauteur de ce triangle la partie dS , égale à la partie DT du côté du cône, si l'on tire SP parallèle à cm , cette parallèle SP sera égale à la circonférence de la base du petit cône supérieur DST .

DÉMONSTRATION.

Considérez le cône DMC . (fig. 122.) Vous devez vous rappeler que la coupe ST a été faite parallèlement à la base circulaire. Ainsi (n°. 279.) $DT : TS :: DC : CM$, ou $DT : DC :: TS : CM$. Les lignes TS , CM sont des diamètres; les diamètres sont entr'eux comme leurs circonfé-

ÉVALUATION DE LEURS SURFACES. 275
 rances (n°. 304.) ; par conséquent DT est à DC,
 comme la circonférence du diamètre TS est à la
 circonférence du diamètre CM.

Reprenant maintenant le triangle rectangle dcm
 (fig. 123.), vous aurez $dS . dc :: SP . cm$. Or les
 deux premiers termes dS, dc de cette proportion,
 sont égaux (par la const.) aux deux premiers termes
 DT, DC de la précédente (fig. 122.) ; par consé-
 quent la circonférence du diamètre TS est à la cir-
 conférence du diamètre CM :: $SP . cm$; ou, en al-
 ternant, la circonférence du diamètre TS . $SP ::$ la
 circonférence du diamètre CM . cm . Mais (supp.)
 la circonférence du diamètre CM = cm , base du
 triangle rectangle dcm ; donc aussi la circonférence
 du diamètre TS = SP ; C. Q. F. D.

C O R O L L A I R E I I I.

357. La surface convexe du petit cone DTS
 (fig. 122.) est donc égale à la surface du petit trian-
 gle rectangle dSP . (fig. 123.) Par conséquent la
 surface SMCT du cone tronqué est égale à la sur-
 face du Trapèze $PmcS$, qui a pour hauteur le côté
 du cone tronqué $TC = Sc$, & pour base deux li-
 gnes parallèles cm, SP , égales aux deux circonfé-
 rences des bases du cone tronqué, chacune à cha-
 cune : car on voit bien qu'en ôtant de grandeurs
 égales des quantités égales, les restes sont égaux.

P R O B L È M E.

358. Trouver la surface d'un cone tronqué
 SMCT (fig. 122.)

R É S O L U T I O N.

Prenez la circonférence du cercle PL également
 Sij

éloigné des deux bases circulaires du cône tronqué. Multipliez cette circonférence par le côté CT de ce cône; le produit sera la surface du cône tronqué SMCT.

DÉMONSTRATION.

La surface du cône tronqué SMCT est égale à celle du Trapèze $PmcS$. Or la surface du Trapèze $PmcS$ est égale à un rectangle de même hauteur, dont la base est moyenne proportionnelle Arithmétique entre les bases parallèles PS, mc (n°. 324.); & cette moyenne proportionnelle Arithmétique est la ligne HL également éloignée des deux bases, ainsi qu'on l'a fait remarquer au même endroit; par conséquent la surface du cône tronqué $= Sc \times HL$. Mais (supp.) le côté TC du cône tronqué $= Sc$. Donc la surface du cône tronqué $= TC \times HL$. Or la ligne HL du Trapèze est égale à la circonférence PL qui est également éloignée des deux bases du cône tronqué, parce qu'il a été démontré (n°. 356.); que chaque ligne du triangle rectangle dcm , parallèle à sa base mc , étoit égale à une circonférence correspondante du cône. Ainsi la surface du cône tronqué $= TC \times PL$; c'est-à-dire, que l'on détermine cette surface en multipliant le côté TC du cône tronqué par la circonférence PL également éloignée des deux bases circulaires du cône tronqué; ce qu'il est important de remarquer. Nous allons nous servir de cette connoissance pour déterminer la surface de la sphère.

Au reste la longueur de cette circonférence de cercle, également éloignée des deux bases circulaires du cône tronqué, est aisée à trouver. Car, puisqu'elle est moyenne proportionnelle Arithmétique entre les circonférences des bases circulaires,

ÉVALUATION DE LEURS SURFACES. 277
la moitié de la somme de ces circonférences fera
connoître la longueur cherchée. (n°. 313.)

Génération de la Sphère.

359. Soit AB (fig. 124.) un diamètre fixe autour duquel le demi cercle ACB fasse une circonvolution. Le plan de ce cercle engendrera un solide ; rond ou circulaire en tous sens , auquel on a donné le nom de *Sphère*. Quelquefois on l'appelle un *Globe*. Une balle de paume , une boule ou une bille de billard sont des Sphères ou des Globes assez parfaits.

Tandis que le plan du demi-cercle engendre un solide , la demi-circonférence qui le termine , produit une *surface sphérique*. Et si l'on regarde la circonférence du cercle comme un Polygone d'un très-grand nombre de côtés fort petits , représentés par les petites tangentes S, S, S , &c. cette circonférence décrira une multitude de petites surfaces de cones tronqués , dont la totalité n'est pas différente de la surface entière de la Sphère ; ensorte que si l'on trouve un moyen d'évaluer les petites surfaces des cones tronqués , lesquels enveloppant la Sphère , se confondent avec sa surface , il est clair que la surface totale de la Sphère sera déterminée.

Avant de passer à l'évaluation de la superficie sphérique , il n'est pas hors de propos de faire connoître les noms que l'on donne à certaines parties de la Sphère.

La ligne AB , sur laquelle le demi-cercle a fait une révolution , est appelée l'*axe* de la Sphère ; les extrémités A, B de l'axe en sont les *poles*. Toute ligne qui passe par le centre O de la Sphère & qui se termine à la surface , est un *diamètre*. L'axe AB est un des diamètres de la Sphère , CD en est un autre. Un *grand cercle* de la Sphère est celui dont

278 GÉNÉRATION DES SOLIDES.

le plan passe par le centre; les cercles de la Sphère, dont les plans ne passent pas par le centre, sont de *petits cercles*. C O D est le diamètre d'un grand cercle; P M N l'est d'un petit. On appelle *zone* une bande de la surface sphérique comprise entre les circonférences de deux cercles parallèles. Un *segment* de Sphère est une pièce, ou un morceau de Sphère coupé par un plan qui ne passe pas par le centre. Si le plan coupant passoit par le centre, il couperoit la Sphère en deux portions égales, dont chacune est un *hémisphère*. En considérant la Sphère, comme l'assemblage de plusieurs cones qui ont leur sommet au centre & leur base à la surface de la Sphère, un de ces cones détaché, ou seulement indiqué dans la solidité de la Sphère, seroit un *secteur* de Sphère. Enfin on appelle *calotte sphérique* une portion quelconque de la surface de la Sphère.

P R O B L Ê M E.

360. Déterminer la surface de la Sphère. (*fig. 125.*)

R É S O L U T I O N.

Prenons une des petites tangentes C D, dont la somme compose la demi-circonférence A F B. (Je donne une grande étendue à cette tangente, afin que les lignes qui servent à la Démonstration, ne se confondent pas.) Du point de contingence F abbaïssons sur l'axe la perpendiculaire F P. La tangente C D étant prise pour un des petits côtés d'un Polygone régulier, les extrémités C, D de la tangente C D sont également distantes du point de contingence F, & par conséquent la perpendiculaire F P est également éloignée des perpendiculaires C H, D T abbaïssées des points C, D sur l'axe A B. De plus, les trois perpendiculaires C H, F P, D T sont parallèles.

ÉVALUATION DE LEURS SURFACES. 279

Si l'on suppose, comme ci-dessus, que le Trapèze $CDTH$ tourne autour de l'axe immobile AB , le plan de ce Trapèze engendrera un cône droit tronqué ; le côté CD produira la surface convexe de ce cône ; les perpendiculaires CH , FP , DT engendreront des cercles parallèles, dont elles seront les rayons.

Afin d'abrégé, pour indiquer la circonférence d'un rayon, par exemple du rayon FP , je représenterai ce rayon au milieu d'une petite circonfé-

rence de cette sorte (FP) .

La circonférence (FP) est donc également

éloignée des deux circonférences (CH) , (DT) ,

des bases circulaires du cône tronqué que nous venons d'engendrer. Or on a la surface d'un cône droit tronqué (n°. 358.) en multipliant le côté CD

de ce cône par la circonférence (FP) également

éloignée des deux bases du cône tronqué. Donc

$CD \times (FP)$ est l'expression de cette surface.

Tirons maintenant la perpendiculaire $CS=HT$, hauteur du cône tronqué, & le rayon OF de la Sphère ; nous aurons les deux triangles CSD , FPO équiangles. Car 1°. l'angle droit S de l'un est égal à l'angle droit P de l'autre. 2°. L'angle
Siv

$\angle CDS = \angle FOP$, puisque $\angle CDS = \angle CFG$, à cause du parallélisme des lignes DT, FP . (supp.) Or $\angle CFG$ formé par la tangente CF & par la corde FG , a pour mesure l'arc FA moitié de l'arc FAG (n°. 105.); & l'angle FOP au centre est aussi mesuré par l'arc FA . Donc l'angle $FOP = \angle CFG$, qui est égal à l'angle CDS ; d'où il suit que l'angle $CDS = \angle FOP$. Donc (n°. 275.) les triangles CSD, FPO sont équiangles ou semblables. Par conséquent CD .

$$CS \text{ ou } HT :: FO . FP :: \textcircled{FO} . \textcircled{FP} :$$

$$(n°. 304.) \text{ ainsi } CD . HT :: \textcircled{FO} . \textcircled{FP} .$$

$$\text{Donc } CD \times \textcircled{FP} = HT \times \textcircled{FO} . \text{ Mais}$$

nous avons vu ci-dessus que $CD \times \textcircled{FP}$ étoit

l'expression de la surface du cone tronqué engendré

par la petite tangente CD . Donc $HT \times \textcircled{FO}$,

c'est-à-dire, la hauteur du cone tronqué multipliée par la circonférence d'un grand cercle de la Sphère, donne aussi la valeur de la surface du petit cone tronqué.

Et comme la même démonstration s'étend à toutes les surfaces des petits cones tronqués qui enveloppent la Sphère (*fig. 124.*), il est évident que la somme de toutes les hauteurs de ces petits cones

EVALUATION DE LEURS SURFACES. 287
est exprimée par l'axe, ou le diamètre AB de la Sphère:

Par conséquent on a la surface totale de ces petits cones tronqués, c'est-à-dire, *la surface totale de la Sphère, en multipliant son diamètre par la circonférence de l'un de ses grands cercles (a).*

COROLLAIRE I.

361. Si l'on circonscrit un cylindre à la Sphère, c'est à dire, si l'on enferme une Sphère $OMNS$ (fig. 126.) dans un cylindre $ABCD$, qui touche la Sphère par-tout où il la peut toucher, la surface convexe du cylindre circonscrit sera égale à celle de la Sphère.

Car le cylindre circonscrit étant aussi gros que la Sphère, ses bases supérieure & inférieure sont des grands cercles de la Sphère. Or (n°. 347.), on a la surface convexe d'un cylindre droit, comme est celui-ci, en multipliant la circonférence de l'une de ses bases par sa hauteur MS , c'est-à-dire, en multipliant la circonférence d'un grand cercle de la Sphère par son diamètre. Mais la surface de la Sphère se détermine avec ces mêmes lignes (n°. 360.); la surface de la Sphère est donc égale à la surface convexe du cylindre qui lui est circonscrit.

COROLLAIRE II.

362. La surface de la Sphère est quadruple de la surface de l'un de ses grands cercles. Cela est

(a) Qui pourroit ne pas admirer le génie d'Archimède, Auteur de cette découverte? Il en fut si satisfait lui-même, qu'il souhaita d'en laisser à la postérité un monument durable. Il demanda qu'on gravât sur son tombeau un cylindre circonscrit à une Sphère; parce qu'il n'avoit pas seulement déterminé le rapport des surfaces de ces deux corps, mais encore celui de leurs solides, comme nous le verrons plus bas. L'inscription de ce tombeau le fit reconnoître à Cicéron dans le tems de sa Quæsture en Sicile.

évident : car on a la surface d'un des grands cercles de la Sphère, en multipliant sa circonférence par la moitié du rayon, ou par le quart de son diamètre. Mais pour avoir la surface totale de la Sphère, on multiplie la circonférence d'un grand cercle par le diamètre entier. La surface de la Sphère est donc quadruple de l'un de ses grands cercles.

COROLLAIRE III.

363. Il suit aussi de la résolution du Problème précédent, que la surface de la Zone xyz (dont on n'a représenté ici qu'une partie) est égale à un rectangle, qui auroit pour base la circonférence d'un grand cercle de la Sphère, & une hauteur égale à la partie de l'axe zT , comprise entre les deux cercles qui terminent la Zone.

Car la surface de cette Zone n'est pas différente de la somme des surfaces des petits cones tronqués qui occuperoient toute son étendue. Or on auroit la surface totale de ces petits cones tronqués, en multipliant la circonférence d'un grand cercle de la Sphère par la partie zT de l'axe qui exprimeroit leur hauteur totale (n°. 360.); on doit donc évaluer la Zone avec ces mêmes dimensions.

Par la même raison, on trouve que la surface de la calotte sphérique xMz se détermine, en multipliant la circonférence d'un grand cercle de la Sphère par la partie Mz qui marque la hauteur de la calotte.

PROBLÈME.

364. Trouver le rapport de la surface totale du cylindre à celle de la Sphère inscrite à ce cylindre (fig. 126.).

RÉSOLUTION.

Nous avons vu (n°. 361.) que la surface de la

EVALUATION DE LEURS SURFACES. 283

Sphère étoit égale à la surface convexe d'un cylindre circonscrit, & (n°. 362.) que cette surface sphérique valoit quatre de ses grands cercles; mais outre la surface convexe, le cylindre circonscrit a encore deux bases, dont chacune est égale à un grand cercle de la Sphère; la surface totale du cylindre est donc égale à six grands cercles de la Sphère: ainsi la surface du cylindre circonscrit est à celle de la Sphère comme 6 est à 4. Or $6 \cdot 4 :: 3 \cdot 2$; par conséquent la surface du cylindre circonscrit est à la surface de la Sphère, comme 3 est à 2; c'est-à-dire, que *la surface de la Sphère n'est que les $\frac{2}{3}$ de la surface totale du cylindre circonscrit.*

P R O B L Ê M E.

365. Déterminer le rapport des surfaces des corps semblables.

R É S O L U T I O N.

Les *corps semblables* sont ceux qui ont des bases, des faces & des inclinaisons semblables; les surfaces de ces corps sont donc composées de figures semblables, chacune à chacune. Or (n°. 306.) les figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Par conséquent *les surfaces des corps semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

C O R O L L A I R E.

366. Ainsi les surfaces des Sphères sont entr'elles comme les quarrés de leurs diamètres, ou comme les quarrés de leurs rayons: car les Sphères sont des solides semblables, dont les diamètres ou les rayons sont des lignes homologues. Cependant, voici comment l'on peut détailler la Démonstration de ce Corollaire.

284 GÉNÉRATION DES SOLIDES, &c.

Soient S, s les surfaces de deux Sphères que l'on va comparer; C, c , les circonférences de leurs grands cercles; D, d , leurs diamètres.

Il a été démontré (n°. 360.) que la surface d'une Sphère étoit égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par son diamètre, donc $S = CD$;

& $s = c d$. Ainsi $S . s :: CD . cd$, ou $\frac{s}{S} = \frac{cd}{CD}$.

Mais (n°. 305.), les circonférences des cercles sont entr'elles comme leurs diamètres; par conséquent $C . c :: D . d$, ou $\frac{C}{c} = \frac{D}{d}$; donc

$\frac{CD}{c d} = \frac{D D}{d d}$. On peut donc mettre dans l'équation

précédente $\frac{D D}{d d}$ à la place de $\frac{CD}{c d}$, & l'on aura $\frac{s}{S} = \frac{D D}{d d}$,

ou $S . s :: D D . d d$; c'est-à-dire, que

les surfaces des Sphères sont entr'elles, comme les quarrés de leurs diamètres, ou comme les quarrés de leurs rayons, parce que les diamètres sont entr'eux comme les rayons.

Ainsi une Sphère de 1 pied de rayon auroit 36 fois moins de surface qu'une Sphère de 6 pieds de rayon, puisque les surfaces de ces sphères seroient entr'elles comme le quarré de 1 est au quarré de 6, ou comme 1 est à 36.



CHAPITRE II.

DE LA SOLIDITÉ DES CORPS.

*Principes & vérités sur lesquels on en fonde
l'Evaluation.*

367. **P**OUR évaluer la solidité des corps, les Modernes ont imaginé des principes avec lesquels on résout avec une extrême facilité tous les Problèmes que l'on peut proposer sur cette matière. Il est vrai que les Anciens, & principalement Archimède, nous en ont laissé tout le fond. Mais la théorie en a paru si profonde à nos Modernes, ou peut-être même si difficile, qu'ils ont jugé plus commode de chercher un nouveau chemin, que de suivre celui qui étoit découvert.

Bonaventure Cavalieri, Milanois, Religieux de l'Ordre des Jésuites, publia en 1635 sa *Géométrie des Indivisibles*. Il y règne un principe qui a été adopté par le plus grand nombre des Géomètres qui sont venus après lui. Ce principe consiste à regarder les Solides comme un assemblage de petits plans élémentaires si minces, que leur épaisseur ne puisse plus diminuer ; c'est ce qui les a fait appeller *Indivisibles*. On a déterminé le nombre de ces plans élémentaires par la perpendiculaire, qui mesure la hauteur des Solides qui en sont composés ; en sorte que, à bases égales, on a compté un plus grand nombre d'éléments à proportion que les hauteurs des Solides ont été plus grandes.

Quand, dans la comparaison de deux solides, on a trouvé les éléments d'une part égaux aux élé-

mens de l'autre part, chacun à chacun, & de plus, un pareil nombre d'élémens de chaque côté, on a conclu que les Solides, auxquels appartenient ces élémens, étoient égaux.

Figurez-vous donc que le petit plan élémentaire M de la pyramide CM (*fig. 127.*) soit retréci continuellement par les côtés de la pyramide, entre lesquels il monte perpendiculairement & parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il soit réduit à rien au point C ; il paroît que ce petit plan M engendreroit un corps précisément égal & semblable à la pyramide CM .

Si l'on imagine de même que le plan P élémentaire coule parallèlement à lui-même le long de la ligne oblique LE , & qu'il soit diminué continuellement par les côtés de la pyramide oblique EP de même hauteur que la pyramide CM ; on conçoit aussi qu'il engendreroit un corps égal à la pyramide EP , dont le nombre des élémens seroit égal au nombre des élémens de la pyramide CM . Nous allons considérer les Solides sous ce point de vue de génération, nous réservant d'en apprécier la valeur, quand nous aurons fait connoître son application.

On doit se rappeler qu'un plan est une surface, dont aucunes des parties ne s'élèvent au-dessus des autres : elle est sans aucunes inégalités; ainsi l'on peut tracer des lignes droites sur un plan. On appelle *commune section* de deux plans MS , DP , (*fig. 128.*) l'étendue OL , dans laquelle ces plans s'entrecoupent.

PROPOSITION PREMIÈRE.

368. La commune section OL (*fig. 128.*) de deux plans quelconques MS , DP , est nécessairement une seule ligne droite.

DÉMONSTRATION.

Prenons les deux extrémités O, L de la commune section. Il est certain que du point O au point L, on peut mener une ligne droite sur le plan MS; on en peut aussi mener une entre les deux mêmes points sur le plan PD, puisque les deux points O, L sont dans l'un & l'autre plan. Or deux lignes droites qui ont les mêmes extrémités, ne font qu'une seule & même droite : ainsi la droite OL appartient à l'un & à l'autre plan; mais elle ne peut être commune que dans l'étendue où ces plans se rencontrent; la mutuelle rencontre, ou la commune section de deux plans est donc nécessairement une seule ligne droite; C. Q. F. D.

Mais une seule ligne droite n'est pas nécessairement la commune section de deux plans; c'est pourquoi la converse est fautive.

Deux plans sont appelés *parallèles*, quand toutes les perpendiculaires abaissées de l'un sur l'autre sont égales.

PROPOSITION II.

369. Deux plans parallèles, coupés par un troisième plan, donnent des sections parallèles rectilignes (*fig. 129.*).

DÉMONSTRATION.

Soient les deux plans AB, CD, parallèles, coupés par un troisième plan OT ou PG perpendiculaire ou oblique à ces deux plans; je dis que dans l'un & l'autre cas, les communes sections OP, LT, ou OP, GF; sont des lignes droites parallèles.

1°. Ce sont des lignes droites (Prop. I. n°. 368.).

2°. Si le plan coupant OF est perpendiculaire, on aura la perpendiculaire OL = la perpendicu-

laire PT ; ainsi les deux sections OP , LT étant deux lignes droites, dont tous les points de l'une sont à égale distance de tous les points de l'autre dans le même plan OT , il est nécessaire que ces deux lignes soient parallèles.

Mais si le plan coupant PG étoit oblique ou incliné aux deux plans AB , CD , cela n'empêcherait pas que les sections OP , GF ne fussent parallèles. Car, imaginez que les sections OP , GF soient des charnières sur lesquelles les plans AB , CD puissent tourner, on pourra faire par ce moyen que les plans AB , CD soient perpendiculaires au plan coupant PG , ou, ce qui revient au même, que le plan coupant PG soit perpendiculaire aux deux plans AB , CD , sans que les communes sections OP , GF aient changé : or nous venons de voir que ces communes sections étoient parallèles, lorsqu'elles sont faites par un plan coupant perpendiculaire; donc puisque, le changement d'inclinaison du plan coupant ne fait point varier les sections, elles resteront encore parallèles, quelque inclinaison que le plan coupant puisse prendre. Par conséquent deux plans parallèles coupés par un troisième plan quelconque, donnent des sections parallèles rectilignes; C. Q. F. D.

Il n'est pas besoin d'avertir que la converse de cette Proposition est fautive.

PROPOSITION III.

370. Si une pyramide quelconque CM (*fig. 127.*) est coupée par un plan parallèle à sa base M , non-seulement il en naîtra une coupe m parallèle au plan M de la base, mais toutes les lignes, qui forment le contour de cette coupe, seront parallèles à toutes les lignes du périmètre de la base M , chacune à leur correspondante.

DÉMONS.

DÉMONSTRATION.

1°. La coupe m est parallèle, parce que le plan coupant est parallèle (supp.).

2°. Chaque côté df est parallèle à son correspondant DF . Car remarquez que les côtés df , DF sont les communes sections des deux plans m , M parallèles, coupés par le troisième plan $CD F$, qui est une des faces de la pyramide : ainsi les communes sections df , DF sont parallèles (Prop. 2. n°. 369.). Appliquez cette même démonstration à tous les côtés correspondans, & il est évident que tous les côtés du périmètre de la coupe m , parallèle à la base M , seront parallèles à tous les côtés du contour de la base M , chacun à son correspondant ; C. Q. F. D.

On voit que la converse de cette Proposition est vraie ; il suffit d'en avertir.

PROPOSITION IV.

371. La coupe m parallèle à la base M de la Pyramide, est un polygone semblable à cette base (fig. 127.).

DÉMONSTRATION.

1°. Tous les côtés de la coupe m sont proportionnels à tous les côtés de la base M , chacun à chacun. Car, puisque (Prop. 3. n°. 370.) df est parallèle à DF , & pd parallèle à PD , &c. on aura $DF . df : CD . cd :: DP . dp$; ainsi $DF . df : DP . dp$. En continuant à comparer de la même façon tous les côtés correspondans, on verra que tous les côtés de la coupe m sont proportionnels à tous les côtés de la base M , chacun à chacun.

2°. Il reste donc à démontrer que les angles correspondans sont égaux, chacun à chacun; par exemple, que l'angle $p d f = P D F$. Imaginez le plan $C F P$, lequel passant par les côtés $C F$, $C P$, coupe les deux plans m , M , & donne les communes sections $f p$, $F P$ parallèles; & vous aurez (const.) $f p . F P :: c p . C P :: p d . P D :: c d . C D :: d f . D F$; donc $f p . F P :: p d . P D :: d f . D F$; & par conséquent, les trois côtés du triangle $f d p$ étant proportionnels aux trois côtés du triangle $F D P$, chacun à chacun, les angles $p d f$, $P D F$, opposés aux côtés homologues $f p$, $F P$, sont égaux (par la converse du n°. 283.). Dites la même chose des autres angles correspondans, & alors, il paroîtra que la base M a non-seulement tous ses côtés proportionnels aux côtés de la coupe m , chacun à chacun; mais encore que les angles de l'une sont égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun; par conséquent ces deux plans sont des polygones semblables; C. Q. F. D.

R E M A R Q U E.

Nous avons déjà averti que les figures différentes du triangle pouvoient être équiangles, sans avoir leurs côtés proportionnels, & réciproquement qu'elles pouvoient avoir leurs côtés proportionnels, sans être équiangles; c'est pourquoi, afin que les figures qui ont plus de trois côtés soient semblables, il faut qu'elles soient en même tems équiangles, & que les côtés de l'une soient proportionnels aux côtés de l'autre, chacun à chacun: or il peut arriver que deux figures soient équiangles, quoiqu'elles n'aient pas leurs côtés proportionnels.

Car, supposez que les côtés de l'héxagone régulier $A B C D E F$ (*fig. 168. pl. 20.*) soient dou-

bles des côtés de l'héxagone régulier *abcdef*, il est clair que ces deux figures sont semblables, c'est à dire, que tous les angles de l'une sont égaux à tous les angles de l'autre, chacun à chacun, & que les côtés de l'une sont proportionnels aux côtés de l'autre ; mais si l'on prolonge les côtés *CD*, *FE*, & qu'en un point quelconque *O* de l'un des prolongemens l'on tire *OM* parallèle au côté *DE*, on voit que la figure *ABCOMF* est équiangle à la figure *abcdef*, & cependant elle ne lui est pas semblable. Ainsi des figures peuvent être équiangles, sans avoir leurs côtés proportionnels, chacun à chacun.

Réciproquement deux figures peuvent avoir tous leurs côtés proportionnels, sans être équiangles. Considérez les deux hexagones réguliers *ABCD FG*, *abcd fg* (*fig. 169. pl. 27.*) : ces figures sont équiangles ; mais faites $BR = BC$, $GT = GF$, & des points *R*, *T*, avec le rayon *BR* ou *GT*, décrivez deux arcs qui se coupent au point *S*, afin d'avoir les côtés *RS*, *TS* égaux au côté du grand hexagone ; il est clair que les côtés de la nouvelle figure *ABRSTG* sont proportionnels aux côtés de la petite figure *abcd fg*, & que cependant les angles de l'une ne sont pas égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun. C'est pourquoi, afin que l'on puisse démontrer que les figures sont semblables, il faut non seulement que les côtés de l'une soient proportionnels aux côtés de l'autre, mais encore que les angles de l'une soient égaux aux angles de l'autre, chacun à chacun.

PROPOSITION V.

372. Les piramides *CM*, *EP* (*fig. 127.*) de même base & de même hauteur, sont égales en solidité ; ou, ce qui est la même chose, deux pyra.
Tij

mides, dont les bases M , P sont égales, ont aussi une égale solidité, lorsqu'elles sont d'ailleurs situées entre les mêmes plans parallèles CE , DL .

DÉMONSTRATION.

Supposons donc que la base M de la pyramide hexagonale CM soit égale en surface à la base P de la pyramide carrée EP de même hauteur : si l'on coupe l'une & l'autre pyramide par un plan parallèle aux bases, cette coupe fera voir les deux petits plans élémentaires m , p semblables à leur base correspondante (Prop. 4. n°. 371.) ; & en imaginant que l'on fasse de semblables sections dans tout l'intervalle des parallèles CE , DL , on réduiroit l'une & l'autre pyramide en un même nombre de petits plans élémentaires ; en sorte que, si l'on démontre que chaque élément d'une pyramide est égal à chaque élément correspondant de l'autre pyramide, on aura démontré que toutes les parties qui composent une pyramide, sont égales à toutes les parties de l'autre, chacune à chacune, & qu'ainsi les deux pyramides sont égales.

Il faut donc prouver que l'élément m est égal à l'élément p correspondant. Tirez CG , & à cause des parallèles CE , dl , DL (supp.) rappelez vous que (n°. 283.) $DF . df :: CD . cd :: CG . CO :: EG . Eg :: GL . gl$. Donc $DF . df :: GL . gl$; ainsi (n°. 254.) $\overline{DF} . \overline{df} :: \overline{GL} . \overline{gl}$. Mais (Prop. 4. n°. 371.) le plan M est semblable au plan m , & le plan P semblable au plan p . Ainsi, puisque les figures semblables sont entr'elles comme les carrés de leurs côtés homologues, (n°. 306.) $M . m :: \overline{DF} . \overline{df}$, & $P . p :: \overline{GL} . \overline{gl}$. Les deux derniers rapports de ces proportions sont égaux ;

les deux premiers le sont donc aussi, par conséquent $M.m :: P.p$; ou, en alternant, $M.P :: m.p$. Mais (par la supp.) $M = P$. Donc aussi $m = p$; c'est-à-dire, que l'élément de la pyramide hexagonale est égal à l'élément correspondant de la pyramide carrée. C'est la même démonstration à l'égard des autres éléments. Ainsi la somme des éléments de la pyramide hexagonale est égale à la somme des éléments de la pyramide carrée, & d'ailleurs le nombre de ces éléments est égal de part & d'autre. Par conséquent les pyramides de même base & de même hauteur sont égales; C. Q. F. D.

La converse de cette proposition est fautive.

C'est ainsi que Cavalieri applique son principe des indivisibles à la démonstration de vérités découvertes depuis plus de deux mille ans; mais par une théorie plus difficile, de l'aveu de tous les Géomètres, & plus rigoureuse, selon quelques-uns.

Nous avons promis de nous expliquer sur cette opinion. On verra notre pensée, que nous renvoyons plus loin, afin que nos Lecteurs aient le tems d'y réfléchir.

C O R O L L A I R E.

373. Les Cones étant des pyramides régulières d'un très-grand nombre de petites faces insensibles, il s'ensuit que les Cones sont non seulement égaux en solidité aux Cones, mais encore aux pyramides de même hauteur & de base égale.

P R O P O S I T I O N VI.

373. On peut toujours diviser un prisme droit triangulaire en trois pyramides triangulaires égales:

DÉMONSTRATION.

Soit le prisme droit triangulaire $AB C D F G$ (*fig. 130.*) appuyé sur une de ses faces parallélogrammes $A C D G$. (On doit s'imaginer que les points B, F sont relevés, & pour concevoir facilement tout ce que l'on va dire, il est à propos d'avoir en main un prisme triangulaire coupé ainsi que nous allons l'expliquer.) Coupez la face $A C D G$ par la diagonale $C G$, & les deux faces $A B F G$, $C B F D$, qui sont en talus, par les diagonales $B G$, $B D$, partant du même point B ; & considérez d'abord les deux pyramides $B G F D$, $G A B C$. En supposant que le sommet de la pyramide $B G F D$ soit en B , sa base sera le triangle $G F D$, & sa hauteur la ligne $B F$; parceque $B F$ est perpendiculaire sur le plan du triangle $G F D$. De même, en prenant le point G pour le sommet de la pyramide $G A B C$, sa base sera le triangle $A B C$, égal au triangle $G F D$ (par la nature du prisme triangulaire), & sa hauteur sera la ligne $G A = B F$, à cause que $A G$ est perpendiculaire sur le plan du triangle $A B C$. Les deux pyramides $B G F D$, $G A B C$ ont donc des hauteurs & des bases égales; elles sont par conséquent égales en solidité. (Prop. 5. n°. 372.)

Il y a une troisième pyramide qu'il n'est pas facile de démêler sur la figure. Afin de l'imaginer plus aisément, enlevons la pyramide $B G F D$ de la figure I. Ne considérons plus que la figure II d'où cette pyramide a disparu, & au lieu de prendre le point G pour le sommet de la pyramide $G A B C$, comme nous avons fait dans la première comparaison, prenons son sommet au point B , en la considérant appuyée sur la base $G C A$. Cela posé, tâchez de discerner une troisième pyramide.

CDGB, dont les faces rampantes vont se réunir au point B qui en est par conséquent le sommet, & dont la base est le triangle CDG égal au triangle GCA.

Les deux pyramides GABC, CDGB ayant même sommet B, & les bases GCA, CDG égales & dans le même plan, parce que la diagonale GC divise le parallélogramme ACDG en deux parties égales; c'est une nécessité (n°. 372.) que la pyramide GABC ait la même solidité que la pyramide CDGB; mais il a été prouvé que la pyramide GABC a aussi la même solidité que la pyramide BGFD; par conséquent les trois pyramides BGFD, GABC, CDGB, qui composent la totalité du prisme, sont égales. On peut donc diviser un prisme triangulaire en trois pyramides égales; C. Q. F. D.

Cette Proposition n'a point de converse.

COROLLAIRE.

375. On voit bien que la même démonstration s'étend aux prismes triangulaires inclinés; par conséquent une pyramide triangulaire, ou un cône, n'est que le tiers d'un prisme triangulaire de même base & de même hauteur.

PROPOSITION VII.

376. Les prismes triangulaires ABCFGD, *abcfgd* (fig. 131.), dont les bases ABC, *abc* sont égales, & qui ont même hauteur, ou qui sont posés entre les mêmes plans parallèles Df, At, ont aussi une solidité égale, soit que ces prismes soient tous deux droits, ou tous deux obliques, ou enfin que l'un soit droit & l'autre incliné.

DÉMONSTRATION.

Tirez les lignes GA, GC, d'une part, & de
Tiv

l'autre les lignes ga, gc ; afin d'avoir les deux pyramides $GABC$, $gabc$, de même base & de même hauteur. (Il faut se représenter les points G, g relevés).

Par la Proposition 6 (n°. 374.) tout prisme triangulaire peut être divisé en trois pyramides égales. Ainsi le prisme $ABCFGD$ contient trois pyramides égales, dont $GABC$ en est une. De même le prisme $abcfgd$ est composé de trois pyramides égales, entre lesquelles on voit la pyramide $gabc$. Or la pyramide $GABC$ est égale en solidité à la pyramide $gabc$ de même base & de même hauteur (n°. 372.). Donc les trois pyramides du prisme triangulaire $ABCFGD$ sont égales aux trois pyramides, dont est composé le prisme triangulaire $abcfgd$; par conséquent ces deux prismes sont égaux en solidité; C. Q. E. D.

La converse de cette Proposition est fautive.

PROPOSITION VIII.

377. Un parallépipède $ABCD FGHM$ est toujours égal à un autre parallépipède $abcd fghm$ de même base & de même hauteur (fig. 132.).

DÉMONSTRATION.

Coupez le premier parallépipède par le plan diagonal $BDMG$: il est évident que ce parallépipède sera divisé en deux prismes triangulaires $ABDFGM$, $BDCGMH$ égaux, puisqu'ils ont même hauteur & des bases égales (Prop. 7.). Par la même raison, le plan diagonal $bdmg$ divisera le second parallépipède en deux prismes triangulaires $abdfgm$, $bdcgmh$ égaux. Mais, on a supposé dans la Proposition que la base $FGHM$ du premier étoit égale à la base $fghm$ du second;

par conséquent les moitiés de la première base, c'est-à-dire, les triangles FGM , MGH sont égaux aux moitiés de la seconde base, ou aux triangles fgm , mgh , chacun à chacun. Or, ces triangles sont les bases des prismes triangulaires de part & d'autre; par conséquent (Prop. 7.) les deux prismes triangulaires du premier parallélipède sont égaux aux deux prismes triangulaires qui composent le second. Il faut donc conclure que les parallélipèdes droits ou inclinés de même base & de même hauteur sont égaux en solidité; C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

378. Un prisme polygone quelconque droit, ou oblique, c'est-à-dire, un prisme dont la base est un polygone quelconque, est égal en solidité à tout autre prisme polygone de même base & de même hauteur.

DÉMONSTRATION.

Car toute base polygone peut être changée en base parallélogramme de même surface, (n°. 322.) ce qui transforme les prismes polygones en parallélipèdes de même base & de même hauteur. Or, ces parallélipèdes sont égaux en solidité (n°. 377.). Donc aussi les prismes polygones quelconques de même base & de même hauteur sont égaux.

COROLLAIRE I.

379. Les cylindres sont des prismes polygones. Ainsi les cylindres de même base & de même hauteur sont égaux en solidité.

COROLLAIRE II.

380. Un prisme polygone quelconque est tou-

jours le triple d'une pyramide polygone quelconque de même base & de même hauteur.

Car, de même que l'on peut transformer tout prisme polygone en une parallélipipède de même base & de même hauteur (n°. 378.), on le peut aussi transformer en un prisme triangulaire de même base & de même hauteur. Dites la même chose de la pyramide polygone, qui peut devenir triangulaire sans changer de solidité; puisqu'il suffit pour cela de transformer en triangle la base polygone de ces solides, ce qui est toujours possible. Or, un prisme triangulaire est toujours le triple d'une pyramide triangulaire de même base & de même hauteur (n°. 375); par conséquent un prisme polygone quelconque est toujours le triple d'une pyramide polygone quelconque de même base & de même hauteur.

COROLLAIRE III.

381. On sçait qu'un cylindre est un prisme polygone, & qu'un cône n'est pas différent d'une pyramide polygone; il est donc évident qu'un cylindre a trois fois plus de solidité qu'un cône ou qu'une pyramide de même base & de même hauteur; ou, ce qui revient au même, qu'un cône ou une pyramide n'est que le tiers d'un cylindre ou d'un prisme de même base & de même hauteur.

382. La mesure effective des solides est entièrement fondée sur les Propositions & les Corollaires précédens. Mais pour mesurer, il faut nécessairement convenir d'une certaine quantité, qui soit un modèle d'évaluation, ou une mesure à laquelle on rapporte toutes les autres mesures.

Dans les Livres précédens, les lignes ou les longueurs ont servi de mesures aux longueurs ou aux distances, les surfaces aux surfaces; il faut donc que

les solides soient mesurés par des solides. Les mesures invariables les plus simples sont les plus commodes. Le cube est un solide, dont toutes les dimensions sont égales, toutes les faces égales, tous les angles égaux & invariables. Ainsi le cube est le modèle d'évaluation le plus naturel de tous les solides.

Une *toise cube* est donc un solide qui a une toise en longueur, une toise en largeur, & une toise en profondeur ou en épaisseur. De même le *piéd cube* est un solide, dont les trois dimensions valent chacune un piéd. Entendez la même chose du *pouce cube*, de la *ligne cube*, du *point cube*.

PROBLÈME.

383. Trouver la solidité d'un parallépipède droit, haut de trois toises sur une base dont la longueur $AB = 6$ toises, & la largeur BC en vaut 4 (*fig. 133.*).

RÉSOLUTION.

Multipliez les trois dimensions de ce prisme les unes par les autres, c'est-à-dire, prenez d'abord l'aire de la base en multipliant 6 par 4 $= 24$. Multipliez ensuite ce produit 24 par 3 le produit 72 indiquera que le prisme proposé contient 72 toises cubes.

DÉMONSTRATION.

Il est d'abord évident que l'aire de la base $= 24$ toises carrées. Coupez maintenant la hauteur BD de ce prisme par des plans horizontaux, qui le divisent en autant de parallépipèdes, hauts d'une toise, qu'il y a de toises dans la hauteur; vous aurez trois tranches, dont chacune contiendra 24 cubes égaux au cube $abcd$ efg qui représente une toise cube; & par conséquent on trouvera le nombre de tous les

cubes, qui composent le prisme proposé, en multipliant 24 par trois, ce qui produira 72 toises cubes, ainsi qu'on l'avoit d'abord indiqué; C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

384. Comme on peut transformer un prisme quelconque en un parallélipède qui lui soit égal en solidité, on voit que l'on déterminera toujours la solidité d'un prisme quelconque, en faisant le produit de ses trois dimensions, longueur, largeur, épaisseur. Tout ce qu'il faut observer dans les prismes obliques, c'est que les trois dimensions soient toujours prises perpendiculairement; parce que les prismes obliques étant égaux à des prismes droits de même base & de même hauteur, & la solidité des prismes droits se déterminant par des perpendiculaires (n°. 383.), il faut bien que ce soient des perpendiculaires qui déterminent aussi les dimensions des prismes obliques.

COROLLAIRE II.

385. Un cube contient donc 216 pieds cubes : car les trois dimensions perpendiculaires de la toise cube contiennent chacune six pieds; & par conséquent (n°. 383.) on aura pour sa valeur en pieds cubes $6 \times 6 \times 6 = 216$ pieds cubes.

Suivant le même principe, le pied cube contenant 12 pouces en long, 12 pouces en large, & 12 pouces en hauteur, contiendra en solidité $12 \times 12 \times 12 = 1728$ pouces cubes.

De même le pouce cube = 1728 lignes cubes; enfin la ligne cube = 1728 points cubes.

Il est nécessaire de sçavoir par cœur ces mesures cubiques; c'est pourquoi j'en donne une Table, afin qu'on y ait recours au besoin.

386. TABLE DES MESURES

cubiques les plus usitées.

La toise cube contient	{	216' pieds cubes , ou 373248 pouces cubes.
Le pied cube contient	{	1728 pouces cubes , ou 2985984 lignes cubes.
Le pouce cube contient	{	1728 lignes cubes , ou 2985984 points cubes.
La ligne cube contient	{	1728 points cubes.

On fait usage dans l'Arpentage de la perche quarrée, & de l'arpent qui vaut 100 perches quarrées, dont chacune = 9 toises quarrées, mesure de Paris ; mais pour toiser les solidités, on ne se sert point d'arpens cubes, ni de perches eubes. Le toisé des ouvrages ordinaires ne demande point des mesures aussi énormes.

PROBLÈME.

387. Déterminer la solidité d'une pyramide ou d'un cone quelconque.

RÉSOLUTION.

Evaluez d'abord sa base en mesures quarrées, multipliez cette valeur par la hauteur de la pyramide, & prenez le tiers de ce produit ; il vous donnera la solidité de la pyramide ou du cone proposé.

DÉMONSTRATION.

On a la solidité d'un prisme quelconque, en prenant le produit entier de ses trois dimensions (n°. 384.), ou, ce qui est la même chose, en multipliant sa base par sa hauteur. Mais une pyramide

ou un cône est toujours le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur (n°. 375.) ; par conséquent on ne prendra pour la solidité d'une pyramide ou d'un cône, que le tiers du produit de sa base par sa hauteur. Soit, par exemple, une pyramide droite quadrangulaire, élevée de 40 toises au-dessus de sa base, dont la longueur = 10 toises, & la largeur en contient 6. Vous en déterminerez la solidité, en multipliant 6 par 10 = 60, valeur de la base, que vous multiplierez ensuite par 40, & vous aurez $60 \times 40 = 2400$, dont le tiers = 800, sera la valeur en toises cubes de la pyramide proposée.

Que la pyramide soit droite ou oblique, cela n'y fait rien, parcequ'il a été démontré (n°. 372.) qu'une pyramide oblique étoit toujours égale en solidité à une autre pyramide droite de même base & de même hauteur.

PROBLÈME.

388. Trouver la solidité du cône droit tronqué ABCD, dont on connoît les circonférences ou les diamètres AB, CD des bases, & le côté AC ou BD. (*fig. 134.*)

RÉSOLUTION.

Continuez les deux côtés AC, BD, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point S, afin d'avoir le cône parfait S A B.

On auroit évidemment la solidité du cône tronqué ABCD, en ôtant le petit cône SCD du grand cône S A B ; ainsi le Problème se réduit à connoître la solidité des deux cônes. Mais je remarque que tout seroit connu, si l'on déterminoit CS ; parceque les hauteurs SG, Sg des deux cônes, appartiennent aux triangles rectangles SGA,

SgC , dans chacun desquels on connoîtroit alors une hypothénuse & un côté, d'où l'on déduiroit facilement le troisième côté (n°. 295.) qui exprime ici la hauteur des cones.

Tâchons donc de connoître CS par les données du Problème, & tout sera résolu. Considérons les triangles semblables SAB , SCD ; nous aurons $AB : CD :: AS : CS$; donc (n°. 251.) $AB - CD : CD :: AS - CS$ ou $AC : CS$. Or les trois premiers termes de cette dernière proportion sont donnés : car $AB - CD$ est la différence des deux diamètres AB , CD donnés; par conséquent le quatrième terme CS de cette proportion est connu (n°. 247.).

Il n'en faut pas davantage pour déterminer la hauteur de l'un & l'autre cone, puisque, 1°. CS étant connu & AC donné, AS sera entièrement déterminé. Dans le triangle rectangle SAG on connoîtra donc l'hypothénuse AS , & le côté AG ; ainsi la hauteur SG du grand cone est déterminée (n°. 295.).

2°. On connoît aussi, dans le petit triangle rectangle SCg , l'hypothénuse CS , & le côté Cg , d'où l'on déduit la hauteur Sg du petit cone.

Les bases & les hauteurs des deux cones étant déterminées, on en trouvera la solidité (n°. 387.), après quoi il ne s'agira plus que de retrancher la petite solidité de la plus grande, & ce qui restera donnera la solidité du cone tronqué; $C. Q. F. T. \& D.$

AUTRE SOLUTION

Assez commode dans la pratique, pour trouver la solidité d'un cone ou d'une pyramide tronquée, indépendamment de la hauteur SG du petit cone enlevé.

Vous trouverez que cette solidité est toujours égale à la somme des solidités de trois cones entiers, de même hauteur que le tronqué, & dont le premier auroit pour base le cercle inférieur, le second le cercle supérieur, & le troisième une base moyenne Géométrique entre le cercle supérieur & l'inférieur du cone tronqué, dont on recherche la mesure (*fig. 134.*).

I. DÉMONSTRATION.

Soit $\frac{A B}{C D} = R$, circonf. $A B = C$, $\frac{C D}{C D} = r$, circonf. $C D = c$, $G g = h$. Alors la base du premier cone $= C R$; celle du second $= c r$; & pour avoir la base m du troisième, on fera $C R : m :: m : c r$; d'où l'on aura $m^2 = C r c R$: mais comme on a $C : c :: R : r$, (304.) & par conséquent $C r = c R$; il s'ensuit que $m^2 = C^2 r^2$, & que $m = C r$; la base du troisième cone sera donc $= C r$. Par conséquent la solidité du premier cone $= C R \times \frac{h}{3}$ (387.); celle du second $= c r \times \frac{h}{3}$, & celle du troisième $= C r \times \frac{h}{3}$; de manière que ces trois solidités réunies $= C R + c r + C r \times \frac{h}{3}$. Il faut donc faire voir que la solidité du cone tronqué que l'on cherche $= C R + c r + C r \times \frac{h}{3}$.

II. Pour y parvenir, recherchons cette solidité suivant la manière précédente, où l'on a fait usage du petit cone supérieur, dont la hauteur $S g$ soit faite $= x$, & par conséquent la hauteur $G S$ du cone entier $= h + x$, & l'on aura [à cause des triangles semblables $A G S$, $C g S$]
R.

$R.r :: h + x.x$; &, en soustrayant, $R - r.r :: h.x$; donc $x = \frac{hr}{R-r}$ fera l'expression de la hauteur du petit cône supérieur; & la hauteur GS sera $= h + \frac{hr}{R-r}$ [en donnant la même dénomination]

$= \frac{bR - hr + hr}{R-r}$, laquelle devient $\frac{bR}{R-r}$. Ainsi, puisque la hauteur GS du grand cône $= \frac{bR}{R-r}$,

& que celle du petit $Sg = \frac{hr}{R-r}$, la solidité du grand sera (n°. 387.) $CR \times \frac{bR}{3R-3r} = \frac{CR^2.b}{R-r \times 3}$,

$= \frac{CR^2}{R-r} \times \frac{b}{3}$; & celle du petit $= cr \times \frac{hr}{3R-3r}$

$= \frac{cr^2.h}{R-r \times 3} = \frac{cr^2}{R-r} \times \frac{b}{3}$; donc, en ôtant la pe-

tite solidité de la grande, celle du cône tronqué sera $= \frac{CR^2 - cr^2}{R-r} \times \frac{b}{3}$. Or $C.c :: R.r$. (304.)

Donc $r = \frac{cR}{C}$. Ainsi $\frac{CR^2 - cr^2}{R-r} = \frac{CR^2 - cr^2}{R - \frac{cR}{C}}$

$= \frac{CR^2 - cr^2}{\frac{CR - cR}{C}} = \frac{C^2R^2 - Ccr^2}{CR - cR}$. Donc la soli-

dité du cône tronqué sera $= \frac{C^2R^2 - Ccr^2}{CR - cR} \times \frac{b}{3}$.

Or, si l'on divise $C^2R^2 - Ccr^2$ par $CR - cR$, ou par $CR - Cr$ (à cause de $Cr = cR$), on aura le quotient exact $CR + Cr$ + l'expression $\frac{Cr^2}{R}$, laquelle $= cr$, parce que $\frac{C}{R} = \frac{c}{r}$. La soli-

dité du cône tronqué se trouve donc $= CR + Cr + cr \times \frac{b}{3}$, comme on s'étoit proposé de le démontrer, art. 1.

REMARQUE I.

Pour avoir la base moyenne proportionnelle Géométrique entre la supérieure & l'inférieure du cone tronqué, il semble qu'il suffiroit d'extraire la racine quarrée du produit de ces deux bases. Mais, comme les racines quarrées sont rarement exactes, & que pour une plus grande précision il faut se jeter alors dans l'approximation des racines, qui exige un calcul assez laborieux, on aura plus commodément cette base moyenne, en multipliant la circonférence C de la grande base par r , moitié du rayon de la petite circonférence supérieure du cone tronqué. Car on a vû (art. 1 de la Démonst.) que cette base moyenne appelée $m = Cr$; ce qui fait éviter l'extraction des racines, ainsi que leur approximation.

REMARQUE II.

Si l'on étoit curieux de trouver un cercle égal à cette base moyenne, il n'y auroit qu'à nommer ce cercle $= m$, & la moitié de son rayon $= x$: on auroit alors (306.) $m \cdot CR :: x^2 \cdot R^2$. Or (art. 1. de la Dém.) $m = Cr$; donc $Cr \cdot CR :: x^2 \cdot R^2$; ainsi $CR^2 r = CR x^2$, & $x^2 = \frac{CR^2 r}{CR} = Rr$; par conséquent $R \cdot x :: x \cdot r$; ce qui démontre qu'une moyenne proportionnelle Géométrique x , entre R , moitié du rayon du grand cercle, & r moitié du rayon du petit cercle du cone tronqué, est le demi-rayon d'un cercle égal à la base moyenne cherchée. Car, décrivant un cercle y avec le double de ce demi-rayon, on trouveroit (306.) $y \cdot CR :: x^2 \cdot R^2$; or $x^2 = Rr$ (const.); donc $y \cdot CR :: Rr \cdot R^2$; & par consé-

féquent $y = \frac{CR^2r}{R^3} = Cr =$ (art. 1 de la Dém.)
la base moyenne m ; C. Q. F. D.

PROBLÈME.

389. Déterminer la solidité de la Sphère. (*fig.*
135.)

RÉSOLUTION.

Multipliez la surface de la Sphère par le tiers de son rayon, ou par la sixième partie de son diamètre; ce produit exprimera la solidité de la Sphère.

DÉMONSTRATION.

Concevez la surface de la Sphère divisée en un très-grand nombre de petites portions égales quelconques, telles que $ao b$, qui ne diffèrent pas sensiblement d'une surface plane: de tous les points de cette petite surface, imaginez les rayons ac, oc, bc , &c. Il en naîtra une petite pyramide abc , dont la hauteur est le rayon de la Sphère; & si l'on suppose que l'on ait réduit ainsi toute la solidité de la Sphère, il est évident qu'elle sera composée d'un très-grand nombre de petites pyramides, lesquelles ayant toutes même hauteur, auront, pour la somme de leurs bases, la surface entière de la Sphère. Or on trouve la solidité d'une pyramide, en multipliant sa base par le tiers de sa hauteur (n°. 387.), & par conséquent on déterminera la solidité de toutes les petites pyramides qui composent la Sphère, en multipliant la somme de leurs bases, ou la surface totale de la Sphère, par le tiers du rayon qui est leur hauteur commune; & comme le tiers du rayon est égal à la sixième partie du diamètre, il est clair que la solidité de la Sphère est égale au produit de sa surface par la sixième partie de son diamètre.

COROLLAIRE I.

On voit par-là que la Sphère est égale à une pyramide, ou à un cône, qui auroit pour base la surface de la Sphère, & pour hauteur son rayon.

Supposons, par exemple, que le diamètre d'une Sphère = 4 pieds : on commencera par chercher (en se servant du rapport d'Archimède) la longueur de la circonférence de l'un de ses grands cercles. On dira donc $7.22 :: 4 : \frac{4 \times 22}{7} = \frac{88}{7}$, valeur de la circonférence cherchée. Or (n°. 360.) cette circonférence multipliée par son diamètre donne la surface de la Sphère. Cette surface sera donc $\frac{88}{7} \times 4 = \frac{352}{7} = 50 + \frac{2}{7}$. Enfin on multipliera $50 \frac{2}{7}$ par la sixième partie du diamètre, c'est-à-dire, par $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6}$: or $50 \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{1000}{21} + \frac{4}{21} = 33 \frac{5}{21} + \frac{4}{21} = 33 + \frac{9}{21}$. Ce qui signifie que la solidité d'une Sphère, qui a 4 pieds de diamètre, est de 33 pieds cubes, & $\frac{9}{21}$ de pied cube, à peu près ; parce que le rapport d'Archimède n'est qu'un rapport approché.

COROLLAIRE II.

390. Il résulte des trois Problèmes précédens, qu'en général les solides de même espèce sont entr'eux comme le produit des dimensions qui concourent à déterminer leur solidité.

Car, soient deux prismes quelconques P, p, dont les hauteurs soient H, h, & les bases BB, bb, (j'indique les bases par les Quarrés, BB, bb ; parce que les bases des solides sont des plans, dont on peut supposer la quadrature), on aura (n°. 383.) $P = BBH$, & $p = b b h$; donc $P. p :: BBH. b b h$; & si, en la place des prismes, on veut prendre des pyramides ou des cônes, on aura P

$\frac{BBH}{3} \& p = \frac{bbb}{3}$ (n°. 383.); donc $P . p$
 $:: \frac{BBH}{3} . \frac{bbb}{3} :: BBH . bbb$: car les tiers sont
 entr'eux comme leurs tous ; par conséquent les so-
 lides de même espèce sont entr'eux comme les pro-
 duits des dimensions d'où résulte leur solidité.

COROLLAIRE III.

391. Mais , quand les solides sont des corps
 semblables, c'est-à-dire , quand les dimensions de
 l'un sont proportionnelles aux dimensions de l'autre,
 ces corps sont entr'eux comme les cubes de
 leurs côtés homologues. J'en vais faire la démon-
 stration sur deux Sphères : il sera aisé de l'appliquer
 aux autres solides.

Soit une Sphère $\equiv S$, la circonférence de l'un
 de ses grands cercles $\equiv C$, son diamètre $\equiv D$:
 pareillement appellons s une autre Sphère, d son
 diamètre, c la circonférence de l'un de ses grands
 cercles.

Suivant le n°. 389. $S = \frac{CDD}{6} \& s = \frac{cdd}{6}$;
 donc $S . s :: \frac{CDD}{6} . \frac{cdd}{6} :: CDD . cdd$; donc
 $S . s :: CDD . cdd$; ou $\frac{s}{S} = \frac{CDD}{cdd}$: mais
 (n°. 305.) les circonférences sont entr'elles com-
 me leurs diamètres, c'est-à-dire , $C . c :: D . d$;
 ou $\frac{C}{c} = \frac{D}{d}$; par conséquent , dans l'équation
 $\frac{s}{S} = \frac{CDD}{cdd}$, au lieu de $\frac{C}{c}$, on peut mettre $\frac{D}{d}$; ce
 qui donnera $\frac{s}{S} = \frac{DDD}{ddd}$, ou $S . s :: D^3 . d^3$.
 Cela veut dire que les Sphères sont entr'elles comme
 les cubes de leurs diamètres.

En supposant deux Sphères, dont l'une ait 1 pied
 de diamètre, & l'autre en ait 3, la solidité de la

première sera 27 fois plus petite que la solidité de la seconde : car la première sera à la seconde, comme le cube de 1 est au cube de 3, ou comme 1 est à 27.

COROLLAIRE IV.

392. Faites attention, en passant, à un principe dont on fait un très grand usage en Physique ; c'est qu'un gros solide a moins de surface, à proportion, qu'un petit solide de même matière.

Prenons l'exemple précédent. Une Sphère de trois pieds de diamètre a 27 fois plus de solidité qu'une autre sphère d'un pied de diamètre : ainsi, en proportionnant la surface de ces sphères à leur solidité, la grosse devoit avoir 27 fois plus de surface que la petite ; elle n'en a pourtant que 9 fois plus : car vous pouvez vous rappeler que les surfaces des corps semblables, c'est-à-dire ici, les surfaces des sphères, sont entr'elles, comme les carrés de leurs diamètres (n°. 366.), ou comme le carré de 1 est au carré de 3. Les surfaces des sphères proposées sont par conséquent entr'elles comme 1 est à 9 : la surface de la grosse sphère est donc simplement 9 fois plus grande que celle de la petite ; par conséquent les surfaces des corps ne sont pas proportionnées à leurs solidités.

PROBLÈME.

393. Trouver le rapport de la solidité de la sphère à celle du cylindre circonscrit.

RÉSOLUTION.

Vous sçavez que la base du cylindre circonscrit à la Sphère, est un grand cercle de la Sphère, & que la hauteur de ce même cylindre est le diamètre de

1^a Sphère. (n^o. 361.) appellons L le cylindre, S la Sphère, C la circonférence de l'un de ses grands cercles, D son diamètre.

On a la solidité d'un cylindre ou d'un prisme polygone, en multipliant sa base par sa hauteur. La base du cylindre proposé est un cercle, dont l'aire est égale au produit de la circonférence par la moitié du rayon, ou par le quart du diamètre; ainsi cette aire est $\frac{CD}{4}$, laquelle multipliée par la hauteur D, produit $\frac{CDD}{4}$ pour la solidité du cylindre L circonscrit: mais (n^o. 389.) la solidité de la Sphère S est $\frac{CDD}{6}$; donc $L : S :: \frac{CDD}{4} : \frac{CDD}{6} :: 6 : 4 :: 3 : 2$. Ainsi $L : S :: 3 : 2$, ou $S : L :: 2 : 3$, c'est-à-dire, que la solidité de la Sphère est à celle du cylindre circonscrit comme 2 est à 3.

COROLLAIRE.

394. Nous avons vû (n^o. 364.) que la surface de la Sphère étoit aussi à celle du cylindre circonscrit comme 2 est à 3. La solidité de la Sphère est donc à la solidité du cylindre circonscrit, comme la surface de la Sphère est à celle du même cylindre.

PROBLÈME.

395. Transformer une pyramide, un cone ou une Sphère, en un parallépipède qui lui soit égal en solidité.

RÉSOLUTION.

1^o. On changera la base de la pyramide ou du cone en un rectangle de même surface que cette base. Sur cette base ainsi transformée, on fera un parallépipède, auquel on donnera pour hauteur le tiers

de la hauteur de la pyramide ou du cône proposé ; il en résultera évidemment le parallélipède demandé (n°. 387.).

2°. Quant à la Sphère, on transformera sa surface en rectangle, c'est-à-dire, que l'on fera un rectangle avec son diamètre, & la circonférence de l'un de ses grands cercles (n°. 362.). On construira sur ce rectangle un parallélipède, dont la hauteur soit égale au tiers du rayon de la Sphère, ou à la sixième partie de son diamètre ; & ce parallélipède aura la même solidité que la Sphère proposée.

Je ne m'arrête pas à démontrer ces constructions, dont la seule indication est plus que suffisante pour les faire concevoir.

P R O B L È M E.

396. Transformer un cylindre, ou un prisme polygone quelconque, en un parallélipède de même solidité.

R É S O L U T I O N.

Changez, comme ci-dessus, la base du cylindre, ou du prisme proposé, en un rectangle de même surface. Sur cette base rectangulaire construisez un parallélipède, dont la hauteur soit égale à celle du prisme ou du cylindre proposé ; il en résultera un parallélipède tel qu'on le demande.

P R O B L È M E

397. Faire un cube égal à un parallélipède donné.

R É S O L U T I O N.

Appellons P le parallélipède donné ; nommons aussi a, b, c les trois dimensions d'où résulte sa solidité : on aura $P = abc$ (n°. 383.).

Ainsi, 1°. si les trois dimensions a, b, c sont données en nombres, tirez la racine cubique x du produit abc de ces trois dimensions; le cube fait avec cette racine cubique x , sera égal en solidité au parallépipède P : car, puisque l'on suppose x égal à la racine cubique de abc ; donc le cube de x doit redonner abc .

Il arrive fort souvent que la racine cubique n'est pas exacte; en ce cas il faut avoir recours à l'approximation des racines (n°. 84. Arith.).

2°. Quand les trois dimensions du parallépipède P ne sont données qu'en lignes, en nommant x le côté du cube cherché, on aura $abc = x^3$. Cherchons d'abord (n°. 309.) une moyenne proportionnelle Géométrique f entre deux dimensions quelconques a, b du parallépipède P , pour avoir $a : f :: f : b$. Donc $ab = ff$; ainsi $abc = ffc$; & par conséquent $x^3 = ffc$. Donc $fx^3 = f^3c$, d'où l'on tire $f^3 : x^3 :: f : c$.

Mais il est aisé de remarquer, que cette dernière proportion peut être déduite d'une progression continue, qui contiendrait deux moyennes proportionnelles x, y , entre f & c . Car, si l'on fait $\frac{f}{x} : x :: x : y$, ou $f : x :: x : y$, on en déduira $f^3 : x^3 :: f : c$, (n°. 257.) c'est-à-dire, que le cube de la moyenne proportionnelle f est au cube cherché, comme cette moyenne proportionnelle est à la troisième dimension c du parallépipède.

Le Problème se réduit donc à trouver deux moyennes proportionnelles Géométriques entre deux lignes données f, c ; & le cube fait sur la première de ces moyennes proportionnelles sera le cube que l'on demande.

Mais on ne sauroit trouver avec le seul secours de la ligne droite & du cercle deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données; ce Problème

ne peut être résolu que par la Géométrie de courbes différentes du cercle.

398. La *duplication du cube*, que l'Oracle de Délos rendit autrefois si célèbre, revient à ce Problème. En lisant la Note (a), on verra à quelle occasion il fut proposé de trouver un cube double d'un autre. Les anciens Géomètres employèrent toute leur sagacité au dépouement de cette question; elle étoit au-dessus de la Géométrie élémentaire,

(a) Le Problème de la *duplication du cube* n'est guères moins fameux que celui de la *quadrature du cercle*.

La peste désoloit Athènes & l'on n'y trouvoit point de remède. On a éprouvé plus d'une fois que l'opinion étoit un excellent spécifique : le Médecin qui s'est emparé une fois de l'esprit de son malade, est très-avancé dans sa cure. Voilà pourquoi je penserois qu'une des grandes parties de la Médecine est l'éloquence.

Les malheureux Athéniens, pénétrés de bonne foi, dont ils avoient toujours de forts redoublemens dans les grandes calamités, eurent recours à l'Oracle de Délos. Apollon y faisoit des merveilles : c'étoit une des plus grandes dévotions de la Grèce. L'Autel du Temple avoit précisément une figure cubique.

Apparemment l'Oracle étoit Géomètre, ou plutôt quelque Géomètre faisoit l'Oracle : car, après avoir entendu les Envoyés d'Athènes, il leur répondit que la peste cesseroit, s'ils pouvoient seulement lui élever un Autel cubique double du sien.

Je ne sçais pas si les Athéniens en comprirent d'abord la difficulté; mais ils durent s'apercevoir, quand ils y eurent un peu pensé, que la plaisanterie de l'Oracle étoit fort déplacée; parceque la résolution du Problème étoit impossible géométriquement, c'est-à-dire, selon les Anciens, en n'employant que la ligne droite & le cercle.

Je me persuade que l'Oracle Géomètre avoit usé toute sa Géométrie à cette question, & qu'il ne l'avoit proposée que pour se réjouir aux dépens des pauvres Athéniens. En ce tems-là, c'étoit assez la coutume des Dieux de se moquer des humains qui avoient besoin de leur protection, parceque très-souvent les humains se moquoient des Dieux, dont ils n'avoient pas besoin.

Cette Note sera peut-être regardée comme un écart un peu violent; mais j'ai déclaré plus d'une fois que je m'expliquerois volontiers sur la nature de l'esprit humain, quand l'occasion s'en présenteroit. Combien de fois l'ai-je accusée d'être trop lente à se montrer? Si l'on trouve cette conduite peu exacte, dit M. le Chevalier de Follard, & contraire aux règles de la discipline des Auteurs réguliers, je ne sçais qu'y faire. Les digressions plaisent & délassent; tout le monde le dit. Je consens que d'autres, qui ne sont pas de l'avis de tout le monde, désapprouvent cette espèce de libertinage : ils ne feront pas pancher la balance. Je dois m'accommoder à toutes sortes d'esprits, & éviter sur toutes choses la sécheresse, dont les matières que je traite ne sont que trop susceptibles.

comme le Problème ci-dessus, dont elle n'est pas différente.

Car soit le cube a^3 dont on demande un cube double. Si vous appelez x le côté du cube cherché par la condition du Problème, vous aurez $x^3 = 2 a^3$, ou $x^3 \times 1 = a^3 \times 2$. Ainsi $a^3 . x^3 :: 1 . 2$, (n°. 246.) :: $a . 2 a$ (n°. 252.). Donc $a^3 . x^3 :: a . 2 a$.

Cette dernière proportion fait voir qu'en faisant un cube sur la première de deux moyennes proportionnelles entre le côté a du cube donné & son double $2 a$, ce cube sera celui que l'on cherche. En effet, supposons les deux moyennes proportionnelles x, y entre a & $2 a$, c'est-à-dire, supposons la progression continue $a . x :: x . y :: y . 2 a$, on aura (n°. 257.) $a^3 . x^3 :: a . 2 a$, ou $2 a . a :: x^3 . a^3$; & comme $2 a$ est le double de a , ainsi le cube de x^3 est double du cube a^3 .

Le Problème de la *duplication du cube* se réduit donc à trouver deux moyennes proportionnelles entre le côté du cube donné & le double de ce côté. Après avoir reconnu que la Géométrie ordinaire ne suffisoit pas à la résolution de ce Problème, les anciens Géomètres le prirent à cœur. A l'invitation de Platon, les plus illustres Mathématiciens de toute la Grèce y travaillèrent. Plusieurs trouvèrent des courbes fort ingénieuses, qui en donnoient la résolution; d'autres imaginèrent des instrumens qui produisoient le même effet. Platon s'y distingua: son instrument est d'une invention très-élégante; on ne me sçaura pas mauvais gré de le faire connoître.

P R O B L Ê M E.

Trouver *organiquement* (a) deux moyennes pro-

(a) *Organiquement*, c'est-à-dire, avec un instrument.

portionnelles entre deux lignes données AB, BC .

Résolution organique de Platon.

399. Sur l'une des branches RG de l'équerre $M RG$ (*fig. 136.*) disposez perpendiculairement la règle mobile PS ; en sorte qu'elle puisse couler; suivant le besoin, le long de la branche RG , en conservant sa perpendicularité. Vous avez l'instrument de Platon.

Pour trouver avec cet instrument deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes données AB, BC ; après avoir mis ces deux lignes à angles droits au point B , prolongez AB indéfiniment vers P , & BC aussi indéfiniment vers R . Cette préparation faite, mettez l'angle de l'instrument en un point R , tel que sa branche RM passant par l'extrémité A de la ligne AB , son autre branche RG coupe le prolongement BP en un point P , où la règle mobile PS amenée passe par l'extrémité C de la seconde ligne BC (ce que quelques tentatives feront découvrir.). Je dis que les deux lignes BR, BP sont les deux moyennes proportionnelles cherchées; c'est-à-dire, que $AB.BR :: BR.BP :: PB.BC$.

D É M O N S T R A T I O N.

Le triangle ARP est rectangle en R ; & (const.) la ligne RB est perpendiculaire sur l'hypothénuse AP : or (n°. 291.) si de l'angle droit d'un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire sur l'hypothénuse, cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre les parties de l'hypothénuse. Donc $AB.BR :: BR.BP$, & par la même raison, le triangle RPC étant rectangle en P , $BR.BP :: BP.BC$. Ainsi BR & BP sont moyen-

nes proportionnelles entre les deux lignes données $AB, BC; C. Q. F. D.$

Il faut convenir que cette Résolution organique est très-élégante; mais aussi est-elle un peu tâtonneuse.

M. Descartes, qui fera à perpétuité la brillante époque du plus grand effort que les Sciences aient jamais pris, a bien renchérit sur tous les Anciens, qui ont travaillé à la duplication du cube. Sans parler de sa Géométrie où ce Problème se trouve résolu comme par accident, ce génie, unique de son tems, & encore supérieur aujourd'hui, a inventé un instrument qui donne, sans aucun tâtonnement, non-seulement deux moyennes proportionnelles, mais encore tel nombre que l'on en veut.

PROBLÈME.

400. Trouver organiquement entre deux lignes données tant de moyennes proportionnelles que l'on voudra.

Résolution organique de M. Descartes.

Son instrument ABC (*fig. 137.*) est une espèce de compas, composé de deux règles, AB, BC , mobiles autour de la charnière B . Sur ces règles sont disposées plusieurs équerres, suivant le nombre des moyennes proportionnelles que l'on cherche : il faut trois équerres pour deux moyennes, quatre pour trois, cinq pour quatre, & ainsi de suite. Chacune de ces équerres touche l'angle de sa voisine, comme on le voit aux points f, g, h, m, o . Les branches dp, fs, gt, hx, my, ou , &c. peuvent glisser sur les règles AB, BC ; par conséquent les autres branches df, fg , &c. étant forcées de se mouvoir, si l'on arrête la première équerre

f d p au point *d* sur la règle *BC*, en ouvrant l'angle ou le compas *ABC*, l'équerre *p d f* fera glisser la voisine *g f s* sur la règle *AB* : l'équerre *g f s* chassée chassera l'équerre *h g t* sur la règle *BC*, & ainsi de suite ; en sorte que par le même mouvement toutes ces équerres se poussent & se chassent en même-temps ; & lorsqu'on ferme le compas entièrement, c'est-à-dire, lorsque les deux règles *AB* ; *BC* se touchent, tous les points *o*, *m*, *h*, *g*, *f*, *d* viennent se réunir au point *a*.

Si vous avez bien conçu la construction de cet instrument, il vous sera facile de comprendre que l'on peut trouver par son moyen autant de moyennes proportionnelles que l'on en demandera.

Voulez-vous deux moyennes proportionnelles entre *BD* & *BH* ? transportez la plus petite *BD* sur la règle *BC* de *B* en *d*, & la plus grande *BH* sur la règle *AB* de *B* en *h*. Mettez l'angle de la première équerre *f d p* au point *d* où vous l'arrêterez ; ouvrant ensuite le compas *ABC* jusqu'à ce que la troisième équerre *h g t* passe par l'extrémité *h* de la plus grande des deux lignes données, l'instrument vous montrera les deux lignes *Bf*, *Bg*, qui seront moyennes proportionnelles entre les lignes proposées *Bd*, *Bh* ; c'est-à-dire, que l'on aura $Bd : Bf :: Bf : Bg :: Bg : Bh$.

D É M O N S T R A T I O N .

Remarquez que par la nature de l'instrument les deux triangles *Bfg*, *Bgh* sont tous deux rectangles, le premier en *f*, & l'autre en *g*. Mais il a été démontré (no. 292.) que, si de l'angle droit *f* d'un triangle rectangle l'on abaisse une perpendiculaire *f d* sur l'hypothénuse *Bg*, chaque côté, comme *Bf*, devient une moyenne proportionnelle

entre l'hypothénuse Bg & le segment Bd qui répond à ce côté. Ainsi $Bd . Bf :: Bf . Bg$: par la même raison le triangle rectangle Bgh , dont Bh est l'hypothénuse, sur laquelle gf est abaissée perpendiculairement de l'angle droit g , donnera cette proportion, $Bf . Bg :: Bg . Bh$, laquelle étant mise à la suite de la première, produira $Bd . Bf :: Bf . Bg :: Bg . Bh$. Les lignes Bf , Bg , sont donc moyennes proportionnelles entre les deux lignes Bd , Bh , ou leurs égales BD , BH ; C. Q. E. D.

Quand on voudra trouver trois moyennes proportionnelles, par exemple, entre BD & BM , il faut que l'instrument ait quatre équerres; & transportant, comme ci-dessus, la plus petite BD sur l'une des règles BC de B en d , ensuite la plus grande BM sur la même règle BC de B en m , on fixera la première équerre au point d , & l'on ouvrira le compas ABC jusqu'à ce que la branche hm de la quatrième équerre passe par l'extrémité m de la plus grande Bm des deux lignes données; alors les trois lignes Bf , Bg , Bh seront les trois moyennes proportionnelles que l'on demande; ce qui se démontre, comme ci-dessus. Car, à cause des trois triangles rectangles Bfg , Bgh , Bhm , & des trois perpendiculaires fd , gh , hg , on aura (n°. 292.) $Bd . Bf :: Bf . Bg :: Bg . Bh :: Bh . Bm$; par conséquent les trois lignes Bf , Bg , Bh sont trois moyennes proportionnelles entre les deux lignes données Bd , Bm , ou leurs égales BD , BM .

Il est clair que cet instrument s'étend à tel nombre de moyennes proportionnelles que l'on voudra, sans aucun tâtonnement.

401. Cependant, quoique l'on ne puisse pas trouver, avec le seul secours de la ligne droite & du cercle, deux moyennes proportionnelles, on en peut trouver trois.

Pour cela on doit sçavoir que cinq grandeurs étant en progression continue, le quatrième degré de la première est au quatrième degré de la seconde, comme la première est à la cinquième; c'est-à-dire, qu'ayant $\div a . x . y . z . b$, on en déduira $a^4 . x^4 :: a . b$.

Rappelez-vous le n^o, 257. où il a été démontré qu'une proportion continue de quatre termes fait que le cube du premier terme est au cube du second, comme le premier est au quatrième. Ainsi $a^3 . x^3 :: a . z$, d'où l'on tire $a^3 z = a x^3$; mais de plus (supp.) $a . x :: z . b$; donc $ab = xz$. Ainsi, en multipliant $a^3 z$ par ab , & $a x^3$ par xz , $a^4 b z = a x^4 z$. Divisant l'un & l'autre membre par z , on trouve $a^4 b = a x^4$. Donc $a^4 . x^4 :: a . b$. Ceci supposé.

PROBLÈME.

402. Trouver Géométriquement trois moyennes proportionnelles x, y, z entre les deux lignes données a, b .

RÉSOLUTION.

On suppose que $\div a . x . y . z . b$; donc (n^o. 401.) $a^4 . x^4 :: a . b$; ainsi $a^4 b = a x^4$; donc $a^3 b = x^4$. Supposant une moyenne proportionnelle f entre a & b , on aura $ff = ab$, & par conséquent $aaff = x^4$. Tirant la racine quarrée de l'un & de l'autre membre, il vient $af = x^2$. Donc $a . x :: x . f$; c'est-à-dire, que la première x des trois moyennes proportionnelles x, y, z entre a & b , est une moyenne proportionnelle entre a & f , que l'on trouve géométriquement (n^o. 309.): or la première des trois moyennes proportionnelles étant trouvée, les deux autres s'ensuivent. On peut

peut donc trouver géométriquement, c'est-à-dire, avec la ligne droite & le cercle, trois moyennes proportionnelles entre deux lignes données, quoique l'on ne puisse pas en trouver deux : C. Q. F. D.

403. On en peut même trouver géométriquement 7, 15, &c. Je vais simplement en exposer le moyen. Supposons que l'on demande sept moyennes proportionnelles entre a & b . Appellons x la première de ces sept moyennes proportionnelles. Il y aura donc neuf quantités en proportion continue. Ainsi (n°. 257.) $a^8 \cdot x^8 :: a \cdot b$. Donc $a^8 b = a x^8$, & $a^7 b = x^8$. Cherchez (n°. 309.) une moyenne proportionnelle m entre a & b , pour avoir $m m = a b$, d'où vous déduirez $a^7 m m = x^8$. Tirant la racine quarrée, vous aurez $a^4 m = x^4$. Cherchant encore une moyenne proportionnelle p entre a & m , vous prendrez $p p$ au lieu de $a m$, & la dernière équation deviendra $a a p p = x^4$; on en extraira la racine quarrée, ce qui donnera $a p = x x$. Donc $a \cdot x :: x \cdot p$. Voilà donc la première des sept moyennes proportionnelles trouvée en ligne, & par conséquent tout est trouvé (n°. 264).

Le Problème, qui consiste à trouver deux moyennes proportionnelles géométriques, est fort utile dans la pratique. On peut par son moyen augmenter ou diminuer un corps selon un rapport quelconque; c'est-à-dire, qu'ayant un parallépipède, une sphère, une pyramide, un prisme, &c. on pourra toujours déterminer un autre corps semblable, qui en soit le double, le triple, &c. ou les $\frac{2}{3}$, les $\frac{4}{7}$, les $\frac{3}{7}$, &c.

P R O B L È M E.

404. Déterminer un parallépipède qui ne soit

Tome II.

X

que les $\frac{3}{7}$ d'un parallépipède P semblable donné.

R É S O L U T I O N.

Soient a, b, c les trois dimensions du parallépipède P donné. Appellons x le côté du parallépipède cherché, qui doit être homologue au côté a . Rappelons-nous maintenant que les corps semblables sont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues. (n°. 391.) Or puisque l'on demande un parallépipède qui ne soit que les $\frac{3}{7}$ de P, le cube du côté x ne doit être que les $\frac{3}{7}$ du cube de a . Ainsi $x^3 = \frac{3a^3}{7}$, ou $x^3 \times a = a^3 \times \frac{3}{7}$. Donc $a^3 \cdot x^3 :: a \cdot \frac{3}{7}$; ce qui fait voir que le côté x du cube cherché est la première de deux moyennes proportionnelles entre a & $\frac{3}{7}$ (n°. 397.) Cette ligne ne pouvant se trouver avec le seul secours de la ligne droite & du cercle, on prendra en nombres la valeur du côté a ; & comme l'on a l'équa-

tion $x^3 = \frac{3a^3}{7}$, on déduira $x = \sqrt[3]{\frac{3a^3}{7}}$, c'est-à-dire, que l'on aura en nombres la longueur de x , en tirant de $\frac{3a^3}{7}$ la racine cubique très-approchée.

Le côté x étant une fois connu, les deux autres côtés du parallépipède cherché se trouveront géométriquement; puisque, par la condition du Problème, les trois dimensions de ce parallépipède doivent être proportionnelles aux trois dimensions a, b, c , du parallépipède donné P.

Supposant donc x connu, & appelant z, y les deux autres côtés que l'on cherche, on dira, $a \cdot x$

1: $b.z$, & les trois premiers termes connus a, x, b , de cette proportion, feront connoître le quatrième y . Le troisième côté y se détermine de la même manière, en faisant $a.x::c.y$, où l'on voit que y est une quatrième proportionnelle aux trois termes connus a, x, c , & par conséquent le côté y est déterminé. Ainsi, faisant un parallépipède avec les trois côtés x, z, y , ce parallépipède sera semblable au parallépipède P donné, & il n'en sera que les $\frac{2}{3}$.

Le Problème sera plutôt résolu, s'il s'agit de trouver une Sphère qui soit à une autre dans tel rapport que l'on voudra.

Car supposons que l'on demande une Sphère triple d'une Sphère donnée, dont le diamètre soit d . Appellant x le diamètre de la Sphère cherchée, comme on sçait que les Sphères sont entr'elles comme les cubes de leurs diamètres (n°. 391.) ; le cube de x sera triple du cube du diamètre d : ainsi

$x^3 = 3 d^3$; d'où l'on tire $x = \sqrt[3]{3 d^3}$; c'est-à-dire, qu'en triplant le cube du diamètre donné, la racine cubique de ce triple fera connoître la longueur du diamètre cherché.

L'Artillerie fait un très grand usage de ce Problème : il donne des boulets dans telle proportion que l'on veut.

Un corps brut, c'est-à-dire, couvert d'inégalités, tel qu'un caillou, ne paroît pas susceptible d'une mesure bien exacte ; cependant on peut en approcher de fort près.

PROBLÈME.

405. Trouver la solidité d'un corps brut ;

X ij

DE LA SOLIDITÉ R É S O L U T I O N .

Préparez un vase cubique ou parallélipipède d'une mesure connue , dont la hauteur soit divisée en un grand nombre de parties égales ; disposez-le horizontalement , & après l'avoir rempli d'eau , plongez-y le corps à mesurer : il chassera une quantité d'eau d'une grosseur égale à son volume ; par conséquent , en mesurant cette eau chassée , on aura la solidité du corps brut qui lui est égal.

Mais , comme il est difficile de recueillir exactement l'eau qui tombe d'un vase , on retirera le corps plongé : la soustraction de ce corps occasionnera un vuide , dont le toisé sera d'autant plus facile que l'on aura fait un plus grand nombre de divisions sur la hauteur du vase. Ce toisé fera connoître la solidité de l'eau , dont le corps brut occupoit la place : cette solidité est la même que celle du corps brut ; ainsi l'on aura la mesure de ce corps : C. Q. E. T. & D.



CHAPITRE III.

DU TOISÉ DES SOLIDES.

406. **N**OUS avons déjà vû que l'on évaluoit la solidité des corps avec une mesure cubique, mesure arbitraire, mais déterminée dans chaque pays, afin que l'on puisse y rapporter les corps, dont on a intérêt de connoître la solidité.

Toiser un solide, c'est donc déterminer combien de fois ce solide contient une mesure cubique convenue, ou simplement quelle partie il en contient. Pour cela on mesure les trois dimensions de ce corps. On les multiplie les unes par les autres, & il en résulte un produit qui en fait connoître la solidité en mesures cubiques. Ce calcul est très simple & fort aisé, lorsque les trois dimensions du solide proposé sont de même espèce, c'est-à-dire, lorsqu'elles contiennent simplement des toises, ou simplement des pieds, &c. mais quand outre les toises, ou les pieds, quelques-unes de ses dimensions ou même toutes les trois contiennent encore des pouces, des lignes, &c. en réduisant ces dimensions à leur plus basse espèce, en lignes, par exemple, le calcul devient d'une longueur énorme : c'est pourquoi on a cherché à le simplifier.

407. Une toise cube étant un solide long, large & haut d'une toise, ou qui a une toise de hauteur sur une base qui est une toise quarrée, concevez que sa hauteur soit divisée en six parties égales. Par chaque point de division faites passer des plans parallèles à la base. Ces plans diviseront la toise cube en six tranches, dont chacune aura une toise quarrée

pour base & un pied de hauteur ; c'est ce qu'on appelle *un pied de toise cube*.

Si vous imaginez que la hauteur du pied de toise cube soit divisée en douze parties égales , & que par les points de division l'on fasse passer des plans parallèles à la base , il en résultera douze tranches qui auront chacune une toise quarrée pour base & un pouce de hauteur ; chacune de ces tranches est *un pouce de toise cube*. Le pied de toise cube contient 12 de ces pouces , & la toise cube en contient 72.

Pareillement un *ligne de toise cube* est un solide dont la base est une toise quarrée , & la hauteur n'est que d'une ligne ; dites la même chose par rapport au *poin: de toise cube*.

On voit par-là que la toise cube contient 6 pieds de toise cube ; que le pied de toise cube vaut 12 pouces de toise cube ; le pouce de toise cube = 12 lignes de toises cube ; enfin la ligne de toise cube = 12 points de toise cube ; ensorte que le toisé des solides a précisément les mêmes divisions que le toisé des longueurs : ce qui est très bien imaginé.

Avant d'en venir à la pratique , remarquez donc bien qu'une toise quarrée , multipliée par des pieds , donne des pieds de toise cube , dont il en faut 6 pour la valeur de la toise cube. Que la même toise quarrée , multipliée par des pouces , produit des pouces de toise cube , dont le pied de toise cube en contient 12 , & la toise cube 72. Pareillement , si l'on multiplie une toise quarrée par des lignes , on aura des lignes de toise cube , dont le pouce de toise cube en contiendra 12 , & le pied de toise cube en vaudra 144. Enfin des points qui multiplient une toise quarrée , produisent des points de toise cube. Il en faut 12 pour la ligne de toise cube , 144 pour le pouce de toise cube , &c.

PROBLÈME.

408. Trouver la solidité d'un parallépipède, dont la largeur = 2 toises, 1 pied, 3 pouces; la longueur = 3 toises, 2 pieds, 4 pouces; & la hauteur = 1 toise, 5 pieds, 9 pouces.

RÉSOLUTION.

On disposera ces trois dimensions les unes sous les autres, chaque espèce dans la colonne qui lui convient, ainsi que l'opération l'indique.

OPÉRATION.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
2	1	3	0	0
3	2	4	0	0
1	5	9	0	0
<hr/>				
2	1	3	0	0
3	2	4	0	0
<hr/>				
6	3	9	0	0
	4	5	0	0
		8	10	0
<hr/>				
7	2	10	10	0 (B)
1	5	9	0	0
<hr/>				
7	2	10	10	0
3	4	5	5	0
2	2	11	7	4
	3	8	10	10
	1	10	5	5
<hr/>				
14	3	11	2	7
<hr/>				

Et après avoir tiré une ligne sous ces dimensions, on écrira une seconde fois les deux premières, afin

de les multiplier l'une par l'autre, comme il a été enseigné au toisé des surfaces, ce qui produira 7 toises quarrées, 2 pieds, 10 pouces, 10 lignes de toise quarrée, que l'on peut regarder comme la base (B) du solide proposé. On multipliera ensuite cette base par sa hauteur, c'est-à-dire, par la troisième dimension = 1 toise, 5 pieds, 9 pouces, que l'on disposera pour cet effet sous 7 toises, 2 pieds, 10 pouces, 10 lignes de toise quarrée, & tirant une ligne sous ces deux dimensions, on multipliera tous les termes de la première successivement par chaque terme de la seconde; ainsi l'on dira: 10 lignes de toise quarrée multipliées par 1 toise, donnent 10 lignes de toise cube, c'est-à-dire, un parallélipède, dont la base est une toise quarrée & la hauteur 10 lignes, parce que 10 lignes de toise quarrée représentent un parallélogramme long d'une toise & large de 10 lignes; par conséquent en multipliant ce parallélogramme par une toise, c'est-à-dire, en lui donnant une toise de hauteur, il en naît un parallélipède, dont la hauteur & la longueur valent chacune une toise, & l'épaisseur est de 10 lignes. Or la hauteur & la longueur forment ensemble une toise quarrée, que l'on peut prendre pour la base de ce parallélipède, dont l'épaisseur alors sera de dix lignes; ce qui produira dix lignes de toise cube, suivant la définition que nous avons donnée de la ligne de toise cube, où nous avons dit que c'étoit un parallélipède haut d'une ligne sur une base en toise quarrée.

On doit appliquer cette explication aux autres dimensions sur lesquelles nous allons opérer, afin que l'on nous dispense d'une répétition, qui deviendroit ennuyeuse même à nos Lecteurs.

En faisant un semblable calcul, & par la même raison, l'on trouvera 10 pouces de toise cube,

2 pieds de toise cube, & 7 toises cubes.

Il faudra ensuite multiplier la dimension B par 5 pieds, en considérant que le produit de cette dimension par une toise étant 7 toises cubes, 2 pieds, 10 pouces, 10 lignes de toise cube, si on partage 5 pieds en $3 + 2$, on ne doit prendre que la moitié & le tiers du produit d'une toise : on écrira donc 3 toises cubes, 4 pieds, 5 pouces, 5 lignes de toise cube, pour la valeur d'une demi toise ou de 3 pieds; & 2 toises cubes, 2 pieds, 11 pouces, 7 lignes, 4 points pour celle de 2 pieds. Après cela, on cherchera le produit de 9 pouces, dont on fera $6 + 3$; & l'on prendra d'abord pour 6 pouces, c'est le quart de la valeur de deux pieds, c'est-à-dire, le quart de 2 toises cubes, 2 pieds, 11 pouces, 7 lignes, 4 points de toise cube; ce qui produira 3 pieds, 8 pouces 10 lignes, 10 points de toise cube, dont la moitié = 1 pied, 10 pouces, 5 lignes, 5 points de toise cube, est la valeur de trois pouces. On fera enfin l'addition des cinq produits qui se trouveront sous la dernière ligne, & l'on verra que la solidité du parallélipède proposé est de 14 toises cubes, 3 pieds, 11 pouces, 2 lignes, 7 points de toise cube.

PROBLÈME.

409. Déterminer la solidité d'un corps dont la longueur = 15 toises, 5 pieds, 3 pouces; la largeur = 6 toises, 2 pieds, 6 pouces; & la hauteur = 8 toises, 3 pieds, 9 pouces.

RÉSOLUTION.

Après avoir disposé ces trois dimensions, comme l'opération le fait voir,

O P É R A T I O N.

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
15	5	3	0	0
6	2	6	0	0
8	3	9	0	0
15	5	3	0	0
6	2	6	0	0
95	1	6	0	0
5	1	9	0	0
1	1	11	3	0
101	5	2	3	0 (A)
8	3	9	0	0
814	5	6	0	0
50	5	7	1	6
12	4	4	9	4 $\frac{1}{2}$
878	3	5	10	10 $\frac{1}{2}$

On cherchera d'abord le produit (A) des deux premières, qui contient 101 toises carrées, 5 pieds, 2 pouces, 3 lignes de toise carrée ; on écrira sous ce produit la troisième dimension, qui est 8 toises, 3 pieds, 9 pouces.

Et l'on continuera de multiplier le produit A par 8 toises, pour avoir 814 toises cubes, 5 pieds, 6 pouces de toise cube ; après quoi il s'agira de trouver la valeur du produit A par 3 pieds : mais, au lieu de 3 pieds, si l'on supposoit 1 toise, il est évident qu'il en résulteroit 101 toises cubes, 5 pieds, 2 pouces, 3 lignes de toise cube ; ainsi pour 3 pieds l'on ne prendra que la moitié du produit de 1 toise, c'est-à-dire, 50 toises cubes, 5 pieds, 7 pouces ;

1 ligne, 6 points de toise cube. Enfin l'on prendra la valeur de 9 pouces, c'est le quart de la valeur de 3 pieds \equiv 12 toises cubes, 4 pieds, 4 pouces, 9 lignes, 4 points $\frac{1}{2}$ de toise cube; après quoi on fera l'addition des trois produits qui sont sous la dernière ligne; ce qui produira 878 toises cubes, 3 pieds, 5 pouces, 10 lignes, 10 points $\frac{1}{2}$ de toise cube pour la solidité du corps proposé, dont on suppose les trois dimensions complètes.

Je n'entre pas dans un détail fort rigoureux du calcul, me bornant à en indiquer la marche; parce que je dois supposer que l'on y sera fort exercé, lorsque l'on arrivera à celui-ci, auquel on n'entendrait rien, si l'on ne se rappelloit pas la méthode dont nous avons fait usage pour le calcul des surfaces. Ce n'est point par des pieds quarrés, ni par des pouces quarrés, &c. que nous les avons calculées; mais par des pieds, des pouces, des lignes, des points de toise quarrée, qui sont des rectangles longs d'une toise sur une largeur d'un pied ou d'un pouce, &c. c'est pourquoi, quand ces parallélogrammes viennent à être multipliés par une toise, on a un solide ou plutôt un parallélipède, dont deux dimensions valent chacune une toise, (ce qui fait une toise quarrée (& la troisième dimension est une partie de toise. Il est nécessaire de bien concevoir tout ceci; moyennant quoi, le toisé des surfaces & des solides est précisément le même que celui des simples longueurs, dont l'exécution est ce qu'il y a au monde de plus facile. Donnons encore quelques Problèmes.

PROBLÈME.

410. On demande la solidité d'un prisme quelconque, dont la première dimension \equiv 3 toises, 1 pied, 7 pouces; la seconde \equiv 2 toises, 4 pieds,

9 pouces; & la troisième = 2 pieds, 11 pou.

RÉSOLUTION.

Cherchez d'abord le produit C des deux premières dimensions.

O P É R A T I O N .

Toises.	Pieds.	Pouces.	Lignes.	Points.
3	1	7	0	0
2	4	9	0	0
	2	11	0	0
<hr/>				
3	1	7	0	0
2	4	9	0	0
<hr/>				
6	3	2	0	0
1	0	6	4	0
1	0	6	4	0
	1	7	7	0
		9	9	6
<hr/>				
9	0	8	0	6 (C)
	2	11		
<hr/>				
3	0	2	8	2
0	4	6	8	0
	2	3	4	0
	1	6	2	8
<hr/>				
4	2	6	10	10 $\frac{11}{12}$

Ce produit est 9 toises quarrées, 8 pouces, 6 points de toise quarrée, que vous multiplierez par 2 pieds, 11 pouces, qui expriment la seconde dimension; mais comme 2 pieds ne sont qu'une partie de toise, & que l'on n'a pas la valeur de la toise, on la supposera, c'est à-dire, on imaginera que 9 toises

quarrées, 8 pouces, 6 points de toise quarrée sont multipliés par 1 toise, afin d'avoir 9 toises cubes, 8 pouces, 6 points de toise cube, dont on prendra le tiers pour la valeur de 2 pieds: c'est 3 toises cubes, 2 pouces, 8 lignes, 2 points de toise cube. Il s'agira ensuite de multiplier le produit C par 11 pouces que l'on partagera en trois parties 6, 3, 2, & l'on prendra d'abord pour 6 pouces; (c'est le quart de la valeur de 2 pieds) ainsi l'on écrira 4 pieds, 6 pouces, 8 lignes, $\frac{1}{2}$ point de toise cube, dont on prendra la moitié = 2 pieds, 3 pouces, 4 lignes, $\frac{1}{4}$ de point de toise cube, pour la valeur de 3 pouces: il ne restera plus que 2 pouces qui sont le tiers de 6 pouces; ce tiers produira 1 pied, 6 pouces, 2 lignes, 8 points $\frac{1}{2}$ de toise cube, qui sont la troisième partie de la valeur de 6 pouces. Faisant enfin l'addition des quatre produits qui sont sous la dernière ligne, on trouvera que la solidité du prisme proposé est 4 toises cubes, 2 pieds, 6 pouces, 10 lignes, 10 points $\frac{11}{12}$ de toise cube.

P R O B L È M E.

411. La longueur d'un parallépipède = 5 pieds, 9 pouces, 6 lignes. Sa largeur est de 2 pieds, 4 pouces, 3 lignes; & son épaisseur = 3 pieds, 6 pouces. Quelle est la solidité de ce corps?

R É S O L U T I O N.

Disposez ces trois dimensions comme ci-dessous.

O P É R A T I O N.

Pieds. Pouces. Lignes. Points.

5	9	6	0
2	4	3	0
3	6		
<hr/>			
5	9	6	0
2	4	3	0
<hr/>			
1	11	2	0
0	3	10	4
	0	13	7
<hr/>			
		2	10 $\frac{3}{4}$
<hr/>			
2	3	3	2 $\frac{1}{4}$ (M)
3	6		
<hr/>			
1	1	7	7 $\frac{3}{8}$
0	2	5	5 $\frac{1}{6}$
<hr/>			
			$\frac{1}{16}$
<hr/>			
1	3	0	10 $\frac{5}{8}$
<hr/>			

Et après avoir trouvé le produit M des deux premières, qui est 2 pieds, 3 pouces, 3 lignes, 2 points $\frac{3}{4}$ de toise quarrée, vous multiplierez ce produit par la troisième dimension, c'est-à-dire, par 3 pieds, 6 pouces. Pour y parvenir, on supposera que l'on ait à multiplier le produit M par une toise; ce qui donneroit 2 pieds, 3 pouces, 3 lignes, 2 points & $\frac{3}{4}$ de toise cube: mais, comme il s'agit de multiplier par 3 pieds, on ne prendra que la moitié du produit M, c'est 1 pied, 1 pouce, 7 lignes, 7 points & $\frac{3}{8}$ de toise cube. Il faut encore multiplier par 6 pouces, c'est-à-dire, par la sixième partie de 3 pieds; on prendra donc la sixième partie de la

valeur de 3 pieds, qui est 2 pouces, 3 lignes, 3 points $+\frac{1}{6}+\frac{1}{16}$ de toise cube. On fera l'addition des deux derniers produits, & l'on trouvera que la solidité du corps proposé $= 1$ pied, 3 pouces, 10 lignes, 10 points de toise cube $+\frac{19}{24}$ de point de la même toise.

EXAMEN DE LA MÉTHODE DES INDIVISIBLES.

412. **C**OMME mon dessein a été de rendre la Géométrie la plus aisée qu'il me seroit possible, j'ai fait usage des moyens qui pouvoient le plus y contribuer. Ceux qui ont médité sur la mesure des solides, ont mis avec raison cette partie de la Géométrie au nombre des plus profondes; elle a valu au grand Archimede l'honneur si rare, unique peut-être, d'avoir été mis par ses propres rivaux au premier rang des Mathématiciens.

Cependant je n'ai pas cru devoir conduire d'abord par ces routes ceux que j'ai ici en vûe; c'eût été leur supposer des forces acquises; & des institutions ne sont faites que pour apprendre l'art d'en acquérir, en faisant l'essai du peu que l'on en a.

La méthode des Indivisibles a prévenu beaucoup de Géometres en sa faveur, & moi-même, pour la faire bien connoître, j'en ai fait usage, à cause de l'extrême facilité qu'il y a de la concevoir. Elle ne suppose aucune Géométrie, aucunes réflexions préliminaires. Ce sont, pour ainsi dire, les yeux qui en font la démonstration. Voulez-vous que l'on démontre que les parallélogrammes ABCD, GMST (*fig.* 138.) de même base & de même hauteur, sont égaux en surface? concevez que ces parallélogrammes soient entièrement couverts d'un

multitude de lignes égales & parallèles à leur base. La somme de ces lignes d'une part n'est pas différente de la surface du parallélogramme qu'elles composent; par conséquent, s'il y a autant de lignes dans le parallélogramme $ABCD$ qu'il y en a dans le parallélogramme $GMST$, comme elles sont d'ailleurs supposées égales, chacune à chacune, il faudra bien convenir que ces deux parallélogrammes sont égaux, puisqu'ils contiendront un même nombre de parties égales. Or il est évident que le nombre des lignes qui composent $ABCD$, est égal au nombre des lignes dont résulte $GMST$: car la somme des lignes composantes de part & d'autre est renfermée dans le même espace parallèle, dont l'étendue mesure sur la perpendiculaire $CB = OT$.

Les deux parallélogrammes $ABCD$, $GMST$ sont donc composés d'un même nombre de parties égales; ainsi ils sont entièrement égaux: $C. Q. F. D.$

On s'est conduit sur le même principe pour démontrer que les prismes ou les pyramides de même base & de même hauteur avoient des solidités égales. Par la démonstration que nous en avons donnée (n°. 372), vous avez vu qu'en coupant les deux pyramides (*fig. 127.*) dans tous les points de leur hauteur par des plans parallèles à leur base; vous avez vu, dis-je, qu'il en naissoit des surfaces ou des tranches toujours égales à leurs correspondantes, chacune à chacune. Et comme ces tranches, qui composent les pyramides de part & d'autre, sont en même nombre, on a conclu encore que les pyramides de même base & de même hauteur avoient une égale solidité, parce qu'elles étoient composées d'un même nombre de parties égales.

On a opposé contre cette méthode, qu'il étoit impossible qu'une surface fût composée de lignes sans aucune largeur, & que la solidité d'un corps
pût

pût résulter de plusieurs surfaces mises les unes sur les autres. Vous prouvez très géométriquement, a-t-on dit aux partisans de Cavalieri, que les tranches correspondantes des pyramides de même base & de même hauteur sont égales. On peut même vous accorder qu'il y a de part & d'autre un égal nombre de tranches ; mais des tranches & des surfaces peuvent-elles jamais composer une épaisseur ? Si cela est, il faudra avouer qu'un corps est composé de surfaces, ou donner aux surfaces composantes une petite épaisseur ; mais qu'est ce, je vous prie, qu'une surface épaisse ? Une vraie contradiction. D'ailleurs un composé de surfaces ne sauroit produire que des surfaces.

J'ai pourtant trouvé quelques personnes très-éclairées, qui m'ont avoué qu'elles concevoient très-clairement que les surfaces composoient les solides. Il est vrai que beaucoup d'autres non moins attentives, ne sauroient l'imaginer. Ceci fonde déjà un doute très légitime. Tâchons donc de fournir de bonnes raisons aux unes, en découvrant le paralogisme des autres.

La seule manière dont on pourroit concevoir que des surfaces viendroient à composer un solide ; c'est qu'elles fussent posées immédiatement les unes sur les autres : or il est impossible de disposer de cette façon plus de deux surfaces. Prenez-en trois ; mettez l'une des trois entre les deux autres ; celle du milieu touchera l'inférieure au dessous, & la supérieure au-dessus ; elle sera donc composée de deux surfaces qui auront entre elles quelque distance ; mais deux surfaces attachées ensemble, qui laissent entre elles quelque distance, composent un vrai solide, en regardant comme un tout ces surfaces & la distance qui les sépare. On a donc supposé l'impossible, quand on a demandé que l'on mît une surface

immédiatement entre deux surfaces : or , si l'on ne peut pas mettre une surface immédiatement entre deux surfaces , on n'en pourra jamais faire résulter un solide , qui n'est autre chose , ainsi que le prétendent les *Indivisibilistes*, qu'un assemblage de surfaces posées immédiatement les unes sur les autres.

Il n'est pas besoin de développer davantage les conséquences absurdes qui naissent de cette supposition. La plus grande partie des Sectateurs de Cavalieri en conviennent.

Cependant ils n'abandonnent pas la thèse. Au lieu de tranches superficielles , vous n'avez qu'à supposer , disent-ils , des solides d'une épaisseur infiniment petite , & vous serez pleinement satisfaits : car des solides pourront apparemment composer un solide.

Depuis cette réponse , il paroît que l'on n'a plus inquiété les Partisans des *Indivisibles* , & que leurs principes ont acquis toute l'autorité des premiers axiomes. Cette autorité s'est d'autant plus fortifiée , que les *Indivisibles* aboutissent à des conclusions qui sont démontrées à la rigueur par des voies incontestables. Un rapport si juste pourroit-il être la production d'un faux principe ?

Reprenons la démonstration des *Indivisibilistes*. Les pyramides de même base & de même hauteur ont un même nombre de tranches , on l'accorde. Il est démontré géométriquement que toutes les tranches de l'une sont égales à toutes les tranches de l'autre , chacune à chacune ; on en convient. Or les pyramides sont composées de ces tranches. Il est bon de s'expliquer. Sont-ce des tranches superficielles ? Les défenseurs des *Indivisibles* en ont reconnu l'impossibilité. Il faut donc que ce soient des tranches solides qui composent les pyramides ; ainsi il reste à démontrer que ces tranches solides sont

égales, chacune à chacune. Les *Indivisibilistes* le supposent; leur démonstration est donc une pétition de principe.

A la vérité ils prouvent à la rigueur que les bases entre lesquelles sont comprises les petites tranches élémentaires ou les petites pyramides tronquées, ont une égalité correspondante; mais c'est changer l'état de la question. Je demande que l'on m'établisse une égalité de solides, & l'on n'aboutit qu'à une égalité de surfaces. Quel paralogisme!

Je conviendrai tant qu'on voudra que ces tranches élémentaires correspondantes ont une épaisseur infiniment petite; mais prouvez-moi que chaque tranche infiniment petite est égale en solidité à sa correspondante: car c'est là précisément l'exposé de la proposition.

On voit maintenant pourquoi la méthode des *Indivisibles* fait parvenir à des vérités démontrées d'ailleurs; c'est qu'il est fort aisé de trouver ce que l'on suppose.

Ainsi ceux qui se conduisent par cette méthode, tombent dans une pétition de principe, ou dans un paralogisme. S'ils supposent que les petites tranches élémentaires correspondantes ont une égale solidité, c'est précisément l'état de la question. Si, après avoir démontré l'égalité des surfaces qui terminent ces tranches au-dessus & au-dessous, on en déduit l'égalité de ces petits solides, il y en a paralogisme inconcevable; on passe de l'égalité de quelques portions de surfaces à l'égalité entière des solidités.

Enfin voici une Démonstration aussi rigoureuse qu'aucune que je sache en Géométrie, par laquelle on va voir que, si les raisons des *Indivisibilistes* étoient légitimes, deux cônes, l'un droit & l'autre oblique, de même base & de même hauteur, auroient leurs surfaces convexes égales; ou que deux

pyramides EK , EP , à bases quarrées (*fig. 127*), l'une droite & l'autre inclinée, de même base & de même hauteur, seroient égales en surface. Ce que l'on pourra appliquer aux prismes, aux parallépipèdes, aux cylindres.

DEM. Comme on peut faire autant de coupes parallèles aux bases K , P dans la pyramide EK , que dans la pyramide EP (de l'aveu des *Indivisibilistes*) ; que chaque coupe s de l'une est non seulement égale à chaque coupe p correspondante de l'autre (par la Dém. du n°. 372), mais encore est un polygone semblable à sa base correspondante (371) ; les bases K , P étant des quarrés égaux (*supp.*), les petites coupes s , p seront aussi nécessairement des quarrés égaux : ce qu'il faut dire de toutes les autres coupes correspondantes, que l'on pourra faire dans l'intervalle des parallèles EC , LD ; par conséquent les circuits de ces quarrés seront égaux ; donc, puisqu'il y a autant de circuit d'une part que d'autre, (*supp.*) la somme des valeurs des circuits d'une part sera égale à la somme des valeurs des circuits de l'autre part : mais chaque somme de circuit couvre la surface de sa pyramide correspondante ; donc, puisque (suivant les *Indivisibilistes*) on peut évaluer les surfaces par les lignes qui les couvrent, & qu'il y a de part & d'autre un même nombre de lignes égales ou de circuits égaux, c'est une nécessité que les surfaces soient aussi égales.

Cependant tous les Géometres savent, & il est très aisé à démontrer, que la surface de la pyramide inclinée P est plus grande que celle de la pyramide droite K , de même base & de même hauteur.

Il me semble que si les *Indivisibilistes* veulent examiner de bonne foi la force de cette démonstration, ils avoueront qu'elle est péremptoire ; ou,

pour le moins, que leur méthode est très sujette à conduire à de grands paralogismes : ce qui est un vrai scandale en Géométrie. Messieurs les *Indivisibilistes* sont donc très fortement invités, ou à passer courageusement condamnation sur leur méthode, ou à nous dire par quels nouveaux états on peut la soutenir.

Prenez bien garde que les raisons que je viens d'alléguer contre les *Indivisibilistes*, n'attaquent point au fonds la méthode des *Indivisibles*. Peut-être que cette méthode bien analysée ne seroit pas différente de la méthode d'*exhaustion* ; mais c'est à quoi je ne veux pas toucher. Je me suis proposé seulement d'examiner les raisons sur lesquelles on la fonde ; elles m'ont paru si foibles, que, si je n'avois pas su d'ailleurs comment on établissoit rigoureusement la mesure des surfaces & celle des solides, je croirois encore très fermement que les élémens de Géométrie ne sont point démontrés. Une proposition a beau être vraie ; si on la fonde sur des suppositions fausses, ou sur des idées qui ne sont pas claires, elle appartient en propre à la faculté de douter.

Comme la plupart des lecteurs sont plus portés à opposer de nouvelles difficultés qu'à résoudre celles qu'on leur fait, on ne manquera pas de me dire que j'infirme le principe du calcul différentiel & intégral. Mais je prie ceux qui seront tentés de me faire cette objection, de s'expliquer là dessus d'une manière claire & intelligible ; & je promets d'apporter à l'examen de leurs raisons toute la circonspection qu'exige l'importance du sujet ; car il m'est impossible ici de répondre à des raisons que je ne connois pas. Le vrai principe du calcul différentiel m'a toujours paru si indépendant de la méthode des *Indivisibles*, que la pensée de ceux qui y trouvent

une identité parfaite , m'est entièrement inconcevable.

Mais s'il falloit des autorités dans une question où l'on doit être à soi-même sa propre lumière , je supplerois que l'on fit attention à ces paroles de l'Archimede moderne, l'incomparable M. Newton. *Contractiones..... redduntur demonstrationes per methodum indivisibilium : sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis , & propterea methodus illa minus Geometrica censetur , malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum evanescentium summas & rationes , primasque nascentium , id est , ad limites summarum & rationum deducere , &c..... Proinde in sequentibus , si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero , vel si pro rectis usurpavero lineas curvas , nolim indivisibilia , sed evanescentia divisibilia ; non summas & rationes partium determinatarum , sed summarum & rationum limites semper intelligi , &c. (a).* Tout cet endroit de M. Newton est fort précis.

M. d'Alembert , de l'Académie Royale des Sciences , va plus loin encore dans son *Traité de Dynamique* , Ouvrage qui feroit beaucoup d'honneur à ceux qui seroient seulement soupçonnés d'en être les Auteurs après vingt ans d'une profonde méditation. *La Méthode des Infiniment petits a un inconvénient ; c'est que les Commençans , qui n'en pénétrant pas toujours l'esprit , pourroient s'accoutumer à regarder ces Infiniment petits comme des réalités : c'est une erreur contre laquelle on doit être d'autant plus en garde , que de grands hommes y sont tombés , & qu'elle a même donné occasion à quelques mauvais Livres contre la certitude de la Géométrie. La Méthode des Infiniment petits n'est autre chose que la Mé-*

(a) Voyez la Section première du premier Livre des principes de M. Newton , au Scol. du Lemm. XI.

thode des raisons premières & dernières, c'est à dire, des rapports des quantités qui naissent, ou qui s'évanouissent (a).

Je ne cite des témoins aussi respectables, que pour rendre un peu plus retenus ceux qui auroient le dessein d'entrer en lice.

Puis donc que la méthode des *Indivisibilistes* est insuffisante, il paroît que je ne saurois me dispenser de produire une autre manière de démontrer la mesure des solides. Je rendrai un bon service aux gens âpres au travail, à ces esprits vigoureux, qui dans les recherches les plus épineuses ne redoutent que l'incertitude des principes. *Les Indivisibles* pourront toujours être de quelque utilité à cette multitude de Lettrés plus avides de parler que curieux de savoir, qui voudroient s'amuser de science sans qu'une application suivie leur en eût acquis le droit.

CHAPITRE IV.

DE LA SOLIDITÉ DES CORPS, selon la Méthode des Anciens, appelée *Méthode d'Exhaustion (b).*

413. **C**ETTE méthode nous oblige à un ordre de Propositions différent de celui que nous avons suivi dans le Chapitre précédent; mais comme l'on est déjà un peu préparé à cette matière, on nous permettra d'être plus courts, pourvu que la clarté n'en souffre pas.

(a) *Traité de Dynamique*, page 36, imprimé chez David l'aîné en 1743.

(b) On verra (n°. 425.) pourquoi on lui a donné ce nom.

PROPOSITION PREMIERE.

414. Les Prismes triangulaires droits ou également inclinés, de hauteur égale, & dont les bases sont égales & semblables, sont égaux en solidité.

DÉMONSTRATION.

Considérez le parallélipede droit ABCDGHMF (*fig. 132*) coupé par le plan diagonal BDMG; il est évident que les deux Prismes triangulaires ABDFGM, BDCGMH sont égaux en solidité, puisque toutes les dimensions de l'un, ses bases & ses faces étant égales & semblables à toutes les faces, bases & dimensions de l'autre, chacune à chacune, l'un de ses Prismes se trouve précisément déterminé de la même maniere que l'autre: ainsi, comme ces Prismes ne different en rien, leur solidité est parfaitement égale.

Si vous appliquez ce même raisonnement au parallélipede oblique *abcdghmf* coupé par le plan diagonal *bdmg*, vous concevrez facilement que le Prisme triangulaire oblique *abdfgm* est égal en solidité au Prisme triangulaire oblique *bdcgmh*; C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

415. Les parallélipedes de même base & de même hauteur ont une solidité égale, (*fig. 139.*)

DÉMONSTRATION.

Il s'agit de prouver que le parallélipede droit BCDEOGHA est égal en solidité au parallélipede oblique BCDEPLMT appuyé sur la même base BCDE, & qui est de même hauteur, ou qui est situé entre les mêmes plans paralleles BCDE, AOLM,

Remarquez d'abord que ces deux parallépipèdes ont une partie commune, qui est le solide $BCPTEDGH$: ainsi il reste à démontrer que le Prisme triangulaire $COPBAT$ est égal en solidité au Prisme triangulaire $DGLEHM$; mais ces deux Prismes droits ont des bases & des hauteurs égales: car on voit que la base $AOPT$ du premier est égale à la base $HGLM$ du second; ces deux Prismes d'ailleurs sont situés entre les mêmes plans parallèles; ils sont par conséquent égaux en solidité. (Prop. I. n°. 414.) Donc les deux parties du parallépipède droit $BCDEOGHA$ sont égales aux deux parties du parallépipède oblique $BCDEPLMT$; par conséquent un parallépipède droit est égal en solidité à un parallépipède oblique de même base & de même hauteur; C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

416. On trouve la solidité d'un parallépipède droit ou oblique, en multipliant sa base par sa hauteur.

DÉMONSTRATION.

Elle est la même que celle que nous avons donnée (n°. 383.), en supposant que le parallépipède soit droit.

Mais s'il est oblique, il n'y aura qu'à imaginer un parallépipède droit de même base & de même hauteur. On en trouvera la solidité par le n°. 383. qui sera la même que celle du parallépipède oblique, (Prop. 2. n°. 415.)

PROPOSITION VI.

417. Les parallépipèdes quelconques qui ont des bases & des hauteurs égales, sont égaux en solidité,

DÉMONSTRATION.

Car (Prop. 3. n°. 416.) on en auroit la solidité ; en multipliant leur base par leur hauteur : or (supp.) les bases & les hauteurs sont égales de part & d'autre, chacune à chacune ; donc les produits seroient égaux ; ce qui indique une égale solidité.

PROPOSITION V.

418. Les Prismes triangulaires quelconques, droits ou obliques, qui ont une égale hauteur, & des bases égales, (sans les supposer semblables, comme on a fait dans la première Proposition) sont égaux en solidité.

DÉMONSTRATION.

Considérez les figures 1, 2 : il est clair que les Prismes triangulaires $BCDGHM$, $bcdghm$ sont chacun moitié des parallépipèdes, dont les bases & les hauteurs sont égales : or, ces parallépipèdes sont égaux (Prop. 4. n°. 417.) ; donc leurs moitiés, c'est-à-dire, les Prismes triangulaires proposés sont aussi égaux en solidité ; G. Q. F. D.

COROLLAIRE.

419. On détermine la solidité des parallépipèdes, en multipliant leur base parallélogramme par leur hauteur ; on aura donc la solidité de leurs moitiés, c'est-à-dire, des Prismes triangulaires, en multipliant la moitié de leur base parallélogramme par leur hauteur : or la moitié de leur base parallélogramme est la base triangulaire d'un Prisme triangulaire. Par conséquent on détermine aussi la solidité d'un Prisme triangulaire, en multipliant sa base triangulaire par sa hauteur. On n'a qu'à jeter un

coup d'œil sur les figures 132. n°. 384. cette vérité devient évidente.

PROPOSITION VI.

420. Les Prismes polygones quelconques, qui ont des bases & des hauteurs égales, ont une égale solidité.

DÉMONSTRATION.

Car, de même que l'on peut diviser en Triangles égaux des Polygones égaux, l'on peut aussi diviser les Prismes polygones, qui ont des bases & des hauteurs égales, en un même nombre de Prismes triangulaires, de même base & de même hauteur. Or (Prop. 5. n°. 418.) les Prismes triangulaires, dont les bases & les hauteurs sont égales, ont une égale solidité; donc les Prismes polygones quelconques, qui ont des bases & des hauteurs égales, sont aussi égaux; C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

421. Puisque l'on trouve la solidité des Prismes triangulaires, en multipliant leur base par leur hauteur (n°. 419), on déterminera aussi la solidité d'un Prisme polygone quelconque, en faisant le produit de sa base par sa hauteur, à cause que ce Prisme polygone peut être réduit en Prismes triangulaires.

PROPOSITION VII.

422. Les Prismes polygones quelconques de même hauteur, sont entre eux comme leur base.

DÉMONSTRATION.

Appellons P, p les deux Prismes que nous comparons; B, b leurs bases; H, h leurs hauteurs.

On aura (Coroll. précéd.) $P = BH$, & $p = bh$; donc $P.p :: BH.bh$: or $H = h$ (supp.); ainsi $P.p :: B.b$. On prouveroit de la même manière que les Prismes polygones quelconques de même base, sont entre eux comme leur hauteur; C. Q. F. D.

J'ai passé rapidement sur ces Propositions préliminaires, afin d'en venir à l'importante Démonstration, où l'on établit l'égalité des pyramides qui ont des bases & des hauteurs égales. C'est ici que la méthode des Anciens va se manifester.

LEMME PREMIER. (a)

423. Si l'on inscrit & si l'on circonscrit sans fin un très grand nombre de Parallélogrammes à une figure plane quelconque, je dis que la somme des Parallélogrammes inscrits différera de la somme des Parallélogrammes circonscrits, moins que d'une surface donnée quelconque, si petite qu'elle puisse être.

DÉMONSTRATION.

Divisez la base BC (fig. 140.) du triangle ABC en autant de parties égales que vous voudrez. Aux points de division élevez les perpendiculaires os , xt , &c. les Rectangles tels que $AosB$, $mxts$ sont dits *circonscrits* au triangle ABC; & les Rectangles $rmSB$, $pyts$, &c. sont *inscrits* au même triangle. Il s'agit de prouver que la somme des circonscrits peut différer de la somme des inscrits, moins que d'une surface donnée quelconque.

Il est évident que la somme des circonscrits ne surpasse la somme des Rectangles inscrits que du rectangle AOSB: or, en divisant continuellement la base BC en un plus grand nombre de par-

(a) Lemme, c'est une Proposition isolée qui prépare à la suivante.

ties égales, le Rectangle AOSB (c'est-à dire, la différence des Rectangles circonscrits aux inscrits) deviendra toujours plus petit; mais une grandeur, qui diminue toujours, devient enfin plus petite qu'une grandeur donnée quelconque, qui ne diminue point: ainsi la différence des Rectangles circonscrits aux inscrits peut devenir inassignable, & par conséquent être plus petite qu'aucune grandeur donnée; C. Q. F. D.

M. Newton, qui goûtoit fort la méthode des Anciens, donne ce Lemme. Je pouvois m'en passer; mais son extrême facilité me l'a fait choisir, pour préparer l'esprit à l'intelligence de celui qui va suivre.

COROLLAIRE.

424. La somme des Rectangles inscrits ou celle des circonscrits peut être telle, que sa différence avec le triangle ABC soit inassignable; de sorte que la somme des circonscrits, celle des inscrits & le triangle deviendront égaux en dernier ressort.

Car la limite de l'augmentation de la somme des inscrits est le triangle ABC, qui est aussi la limite de la diminution de la somme des circonscrits; c'est à dire, que la somme des inscrits ne sauroit devenir plus grande que le triangle dont elle peut approcher de plus en plus, & que la somme des circonscrits ne peut pas aussi devenir plus petite que le triangle à l'égalité duquel elle tend sans cesse; par conséquent les deux sommes tendent sans fin à l'égalité du même triangle; elles en approcheront donc si près, que leur différence du triangle sera inassignable, & pourra sans aucun inconvénient être regardée comme nulle: ainsi la somme des Rectangles circonscrits, celle des inscrits & le triangle deviendront égales en dernier ressort.

LEMMES II.

425. Inscrivons à une pyramide triangulaire un très grand nombre de Prismes triangulaires. Je dis que leur somme se confondra enfin avec la pyramide, ou que la solidité totale de ces Prismes inscrits n'est pas différente de celle de la pyramide. (fig. 141.)

DÉMONSTRATION.

Concevez donc que la ligne af qui représente la hauteur de la pyramide $afKL$, soit divisée en un très grand nombre de parties égales par des plans parallèles à la base fKL de la pyramide (on la suppose ici divisée en quatre parties égales seulement, afin d'éviter la confusion qui naîtroit d'un plus grand nombre de parties); & représentez-vous que l'on ait inscrit à la pyramide les Prismes triangulaires hc , od , rf , dont les faces supérieures continuées produisent les Prismes triangulaires sf , pd , mc circonscrits, & de même hauteur que les inscrits: joignez-y le Prisme circonscrit gb de même hauteur que les précédens. Il est visible que la différence des Prismes circonscrits aux inscrits est la somme des solides gb , mt , px , sy : or cette somme est égale au seul Prisme circonscrit sf . Car les Prismes de même base & de même hauteur étant égaux (n°. 420.), $gb = hc$; donc $gb + mt = hc + mt =$ le Prisme total mc qui est composé de ces deux solides: ainsi $gb + mt = mc$: mais $mc = od$ de même base & de même hauteur; donc $mc + px = od + px =$ le Prisme total pd ; par conséquent $gb + mt + px = pd$: or $pd = rf$; donc $pd + sy = rf + sy =$ le Prisme total sf ; donc enfin $gb + mt + px + sy = sf$; c'est-à-dire, que la différence de la somme des

Prismes circonscrits à la somme des Prismes inscrits est égale au seul Prisme circonscrit *sf*. Mais, en divisant la hauteur *af* en un très grand nombre de parties, le Prisme *sf* peut devenir plus petit qu'aucune grandeur donnée, & dans ce cas la différence des Prismes inscrits aux Prismes circonscrits seroit inassignable : or ces Prismes, tant les inscrits que les circonscrits, tendent à l'égalité avec la pyramide qui est la limite des uns & des autres. (Lemme I. n°. 423.) Donc, dans une division poussée très loin, la somme des Prismes inscrits approche si près de la pyramide entière, que leur différence s'évanouit ; par conséquent la somme des Prismes inscrits est égale en solidité à celle de la pyramide, ou, si l'on veut, n'en diffère que d'une quantité inassignable ; C. Q. F. D.

On doit s'attacher à bien comprendre ce Lemme, où tout le fonds de la méthode des Anciens est entièrement manifesté : elle consiste, comme l'on voit dans ce cas particulier, à inscrire ou à circoncrire à la pyramide un nombre si énorme de Prismes, que l'inscription ou la circonscription en soit, pour ainsi dire, épuisée ; c'est ce qui lui a fait donner le nom de *méthode d'exhaustion* (a). Nous aurons peut-être occasion quelque jour de faire voir que l'application du calcul différentiel & intégral remonte à cette méthode ; mais ce qui nous importe ici, c'est de l'appliquer à la mesure de la pyramide.

PROPOSITION VIII.

426. Les pyramides triangulaires de même hauteur sont entre elles comme leurs bases.

DÉMONSTRATION.

Soient les deux pyramides $ABCD$, $abcd$, (fig. 142.) dont les hauteurs égales AD , ad

(a) *Exhaustion*. Ce mot vient du latin *exhaustio*, épuisement.

soient divisées en un même nombre de parties égales ; par les points de division , imaginez de part & d'autre des plans paralleles à la base ; concevez de plus que l'on ait inscrit à chaque pyramide un même nombre de Prismes triangulaires qui aient une égale hauteur : si ce nombre de Prismes triangulaires inscrits est multiplié sans fin , leur somme ne sera pas différente de la solidité de la pyramide à laquelle ils appartiennent (Lem. 2. n°. 425.) ; par conséquent si l'on démontre que chaque Prisme de la pyramide $ABCD$ est à chaque Prisme correspondant de l'autre pyramide $abcd$, comme la base BCD de la premiere est à la base bcd de la seconde , il est clair que la somme des Prismes d'une part , sera à la somme des Prismes de l'autre part , c'est-à-dire que la solidité d'une pyramide sera à la solidité de l'autre , comme la base de la premiere est à la base de la seconde.

Prenons donc les deux Prismes OT ; ot correspondans. Par la construction , ces deux Prismes ont même hauteur , & par conséquent ils sont entre eux comme leurs bases (n°. 422.) ; ainsi le Prisme OT triangulaire est au Prisme triangulaire ot , comme la base OPM est à la base opm : mais , à cause des sections paralleles , les triangles OPM , opm sont semblables à leur base correspondante BCD , bcd ; par conséquent $OPM . BCD :: \overline{PM} .$

$\overline{CD} :: \overline{AM} . \overline{AD} :: \overline{am} . \overline{ad} :: \overline{pm} . \overline{cd} :: opm . bcd$ (n°. 306.) ; ainsi $OPM . BCD :: opm . bcd$; donc , puisque le Prisme OT est au Prisme ot de même hauteur , comme OPM est à opm , on aura aussi $OT , ot :: BCD . bcd$.

On prouvera de même que $RH . rh :: BCD . bcd$, & que $SD . sd :: BCD . bcd$: ainsi le rapport d'un Prisme à son correspondant est égal au rapport

rapport de tout autre Prisme à son correspondant. Par conséquent $OT.ot :: RH.rh :: SD.sd$; donc, $OT + RH + SD.ot + rh + sd :: OT.ot$ (n°. 258.) $:: BCD.bcd$; c'est-à-dire, que la somme des Prismes inscrits à la pyramide $ABCD$ est à la somme des inscrits à l'autre pyramide $abcd$, comme la base de la première est à la base de la seconde : mais (n°. 425.) la somme des Prismes inscrits se confond avec la pyramide qui en est composée, ou n'en diffère que d'une quantité inassignable; donc enfin la pyramide $ABCD$ est à la pyramide $abcd$ de même hauteur, comme la base BCD est à la base bcd ; C. Q. F. D.

PROPOSITION IX.

427. En général, les pyramides de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases, de quelque figure que ces bases puissent être (*fig. 143.*).

D É M O N S T R A T I O N.

Considérez la pyramide hexagonale $ABCDF$, & la pyramide quadrangulaire $abcd$ de même hauteur que l'hexagonale. Divisez leur base en Triangles, afin de résoudre l'une & l'autre pyramide en pyramides triangulaires. Appellons P la pyramide hexagonale, B sa base $BCDFGH$. Soit aussi nommée p la pyramide quadrangulaire, & b sa base bcd ; il s'agit de prouver que $P.p :: B.b$.

1°. Par la Proposition 8. n°. 426. les pyramides triangulaires de même hauteur sont entr'elles comme leurs bases; ou, en alternant, une pyramide triangulaire est à sa base, comme la pyramide triangulaire de même hauteur, qui lui est comparée, est à sa base; donc $ABCH.BCH :: ACGH.CGH :: ACDG.CDG :: ADFG.DFG$. Ainsi

(n°. 258.) $ABCH + ACGH + ACDG + ADFG (P) . BCH + CGH + CDG + DFG (B) :: ABCH . BCH$; c'est-à-dire, que l'on a $P . B :: ABCH . BCH$

2°. Par la même raison $abcf . bcf :: acdf . cdf$. Donc (n°. 258.) $abcf + acdf(p) . bcf + cdf(b) :: abcf . bcf$, ou $p . b :: abcf . bcf$: or $abcf . bcf :: ABCH . BCH$ (n°. 426.) :: $P . B$ (Art. 1°.); par conséquent $P . B :: p . b$, ou, en alternant, $P . p :: B . b$; c'est-à-dire, que les pyramides polygones quelconques de même hauteur sont entr'elles comme leur base; C. Q. F. D.

PROPOSITION X.

428. Les pyramides quelconques de même hauteur & de même base, ou de bases égales, ont une égale solidité.

DÉMONSTRATION.

On vient de voir (Prop. 9. n°. 427.) que les pyramides quelconques de même hauteur étoient entr'elles comme leurs bases : or l'on suppose les bases égales; donc les pyramides sont aussi égales : ainsi les pyramides de même base & de même hauteur ont une égale solidité; C. Q. F. D. (a).

(a) Pour peu que l'on fasse réflexion sur la *méthode d'exhaustion* que les Anciens ont suivie, on verra combien elle est propre, non seulement à éclairer l'esprit, mais à le conduire à une conviction parfaite; bien différente en cela de la *méthode des indivisibles*, qui laisse toujours dans l'esprit cette inquiétude, qui poursuit & agite sans relâche ceux qui cherchent la lumière & ne la trouvent pas : car les *Indivisibilistes*, après avoir établi une égalité de surfaces, en déduisent immédiatement une égale solidité entre les corps qui ont ces surfaces égales; comme si deux corps ne pouvoient pas avoir des surfaces égales, sans être égaux en solidité; & quand même cela seroit, il resteroit toujours à le démontrer : mais suivant la *méthode d'exhaustion*, on conclut que les pyramides de même base & de même hauteur sont égales; parce qu'elles sont composées d'un même nombre de solides

Après avoir démontré que les pyramides de même base & de même hauteur sont égales en solidité, on pourra démontrer, comme dans le Chapitre précédent (n°. 375.), qu'une pyramide triangulaire n'est que le tiers d'un prisme triangulaire de même base & de même hauteur, & en déduire la solidité des autres corps, ainsi que nous l'avons exécuté en cet endroit.

429. Mais Saunderson, Mathématicien Anglois, aveugle presque de naissance (a), a trouvé une

démonstrés égaux à la rigueur, chacun à chacun; & si l'on veut que la somme de ces solides ne se confonde pas entièrement avec la pyramide, qui en est composée, au moins est-il démontré à la rigueur que la différence est inassignable.

(a) *Saunderson aveugle presque de naissance.* Voici un fait bien singulier; ce n'est point une tradition, ce n'est point le témoignage unanime des anciens Ecrivains les plus accrédités: c'est ce que l'on voyoit encore il y a six ans, ce que toute l'Angleterre a pu voir en public pendant près de cinquante-six ans; un homme à qui la petite vérole fit perdre la vue à l'âge d'un an, de manière que la substance même des yeux ne lui resta pas. Un abcès la fondit totalement. On a sçu de lui-même que l'idée de la lumière s'étoit entièrement effacée de son esprit, & que par rapport aux couleurs il étoit précisément dans le cas d'un aveugle né; & cependant cet homme, indépendamment du Latin, du Grec & du François qu'il sçavoit très-bien, apprit les Mathématiques, composa des Ouvrages en ce genre très-estimés qui sont imprimés en langue Angloise. Ils m'ont été communiqués par M. l'Abbé Sallier, Garde de la Bibliothèque du Roi, qui fait toujours un très-bon accueil à ceux qui ont envie d'être utiles au public. Enfin cet aveugle parvint à communiquer ses idées d'une manière si claire & si précise, qu'on le jugea très-capable d'enseigner publiquement. Il fut Professeur des Mathématiques à Cambridge, fameuse Université d'Angleterre. On avoue que très-peu de personnes ont enseigné avec plus de succès une science, où les yeux paroissent absolument nécessaires. Il imagina des machines pour tracer aux yeux de ses Disciples toutes les lignes droites ou courbes nécessaires à ses Démonstrations; ce qu'il exécutoit avec une précision & une netteté à laquelle il est rare d'atteindre, même avec de bons yeux. Ses talens extraordinaires lui valurent l'honneur d'être membre de la Société Royale de Londres. Il mourut en 1739. âgé de cinquante-six ans.

Le Lecteur curieux ne manquera pas de demander par quel organe Saunderson acquit les idées d'étendue, de corps, de nombres, de proportion, &c. Ce fut par le TOUCHER. L'organe de la vue est si commode, il fait entrer dans notre âme une prodigieuse quantité d'idées si rapidement, que nous négligeons de faire attention à je ne sçais combien d'idées très-distinctes, que nous attendrions inutilement du ministère des yeux. Quelques Physiciens modernes ont dit que l'organe du TOUCHER étoit le plus grossier de tous les sens.

manière très-élégante, pour démontrer que l'on devoit déterminer la solidité de la pyramide, en multipliant sa base par le tiers de sa hauteur : nous allons faire connoître la construction & la démonstration du Mathématicien Anglois.

PROPOSITION XI.

430. La solidité d'une pyramide droite ou oblique est égale au produit de sa base par le tiers de sa hauteur (*fig. 144.*).

DÉMONSTRATION.

I. Soit la pyramide droite $BCDFG$, dont la base $CDFG$ est un carré; sur cette base construisons le cube MC ; dont la hauteur AS soit dou-

Après la vue, je n'en connois point de plus fin ni plus sûr. Consultez les Chirurgiens; ils vous diront que la science du TOUCHER est une des parties les plus importantes dans leurs opérations.

Mais c'est principalement dans la mesure effective de l'étendue, que le TOUCHER l'emporte en précision sur l'organe de la vue. Oseroit-on assurer qu'il y a une égalité entière entre deux grandeurs, où les yeux n'apperoivent aucune différence, si l'on n'y mettoit les mains? Les personnes attentives n'estiment-elles pas les choses beaucoup plus à la main qu'aux yeux? Qui est-ce qui croiroit avoir son compte, s'il achetoit un fonds de terre que les yeux seuls auroient mesuré? Il n'y a donc que le TOUCHER qui soit l'organe propre à déterminer à toute rigueur l'étendue, qui est l'objet des Mathématiques.

Je conviens que Saunderson n'a pas dû sçavoir autant de Mathématiques qu'un homme ordinaire, doué d'une égale pénétration; parce que le TOUCHER ne s'étend pas aussi loin, ni aussi rapidement que la vue; mais il me semble qu'il a dû mieux sçavoir ce qu'il sçavoit.

C'est une expérience constante, que nos idées sont d'autant moins distinctes qu'elles sont plus multipliées, plus fréquentes, plus diverses, plus variées à la fois : or c'est ce que produit l'organe de la vue. Une idée qui nous vient par ce sens, est presque toujours croisée par mille autres, qui se présentent avec elle. L'ame a beau les chasser, ce sont des opiniâtres qui ne veulent point sortir. Me permettra-t-on de le dire? la porte de nos yeux est en quelque sorte trop grande pour ceux qui méditent. Nous ne sçaurions laisser entrer nos idées une à une; ce qui pourtant seroit assez commode, afin que l'ame n'eût pas en même tems des perceptions mal assorties. Mais le TOUCHER ne nous donne, pour ainsi dire, les idées qu'aussi lentement & qu'à mesure que nous le voulons. L'ame moins surchargée en fait plus facilement l'examen. En un mot, elle compte plus juste, parcequ'elle a moins à compter.

ble de la hauteur BS de la pyramide proposée : il est clair que, si du sommet B de la pyramide l'on tiroit des lignes à tous les angles de chaque face du cube, il se trouveroit résolu en six pyramides de même base & de même hauteur, parce que le sommet B de la pyramide est également éloigné de toutes les faces égales du cube ; les six pyramides seroient donc égales en solidité (Prop. 10. n°. 428.) : ainsi la pyramide $BCDFG$ est la sixième partie du cube MC . Or on a la solidité de ce cube, en multipliant sa base $CDFG$ par sa hauteur AS (Prop. 3. n°. 416.) ; par conséquent la solidité de la pyramide $BCDFG$ est égale au produit de la base $CDFG$ par la sixième partie de AS , ou par le tiers de sa moitié BS , hauteur de la pyramide.

Ainsi, quand une pyramide à base carrée est droite, & que sa hauteur n'est que la moitié du côté de sa base, on en a la solidité en multipliant sa base par le tiers de sa hauteur.

II. Si la pyramide L proposée est oblique, à base polygone quelconque & d'une hauteur quelconque, sa base pourra être transformée en un carré qui lui soit égal (322.) ; ce qui donnera une pyramide p à base carrée, laquelle ayant même hauteur que la précédente L , lui sera égale en solidité (428.). Soit H la hauteur de la pyramide p , c le côté de sa base carrée cc ; & imaginez une autre pyramide P de même hauteur H que la précédente p , mais dont le côté de la base soit égal à $2H$, pour avoir une pyramide dans le même cas que celle de l'art. I. & dont la base carrée soit $= 4HH$. Il est clair (art. I.) que la solidité de cette pyramide $P = 4HH \times \frac{H}{3}$: or les pyramides p, P , de même hauteur H , sont entr'elles comme leurs bases $cc, 4HH$; (427.)

588 DE LA SOLIDITÉ
 donc $p : P :: cc : 4 HH$, ou (puisque $p = \frac{1}{3} 4 HH \times \frac{H}{3}$) $p : 4 HH \times \frac{H}{3} :: cc : 4 HH$;
 d'où l'on tire $p = \frac{cc \times \frac{H}{3}}{4 H^2} = cc \times \frac{H}{3}$; ce

qui signifie que la pyramide p , de même base & de même hauteur que la supposée L , est égale au produit de sa base cc par le tiers de sa hauteur H .

Ainsi la démonstration de *Saunderfon* est générale, ou applicable à toutes les pyramides quelconques. Elle est incomparablement plus simple que celle qui se déduit de la section du Prisme triangulaire en trois pyramides égales; section qu'il est très difficile d'imaginer dans le solide.

COROLLAIRE.

431. Dans les pyramides égales, & généralement dans tous les corps égaux en solidité, la base & la hauteur sont en *raison réciproque*.

Quand on compare deux corps, & que la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du premier est à la hauteur du second, on dit que les bases & les hauteurs sont en *raison directe*.

Mais si la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second est à la hauteur du premier, alors les bases & les hauteurs de ces corps sont en *raison réciproque*; parce que si la base du premier est plus grande que la base du second, réciproquement la hauteur du second surpasse d'autant la hauteur du premier; ce qui fait une compensation.

Ceci entendu, soient deux pyramides P, p , leurs bases B, b , & leurs hauteurs H, h . Par la proposition précédente, $P = \frac{BH}{3}$ & $p = \frac{bh}{3}$; mais (supp.)

$P = p$. Donc $\frac{BH}{b^3} = \frac{h^3}{b^3}$: ainsi $BH = bh$; d'où l'on tire, $B : b :: h^3 : h$. C'est-à-dire, que la base B du premier est à la base b du second réciproquement, comme la hauteur h du second est à la hauteur H du premier.

Nous finissons ici ce Chapitre. Le reste se déduit aisément de la mesure de la pyramide, ainsi qu'on peut le voir au Chapitre précédent, que nous avons traité par la méthode des Indivisibles, en faveur de ceux qui ne veulent pas approfondir les choses.

RECAPITULATION de la Méthode d'Exhaustion. Confirmation de cette Méthode.

432. **L**A méthode d'Exhaustion consiste, ainsi que nous l'avons vû, à faire voir que deux ou plusieurs quantités sont égales, quand on ne peut pas leur assigner une différence déterminée; en sorte qu'en supposant même cette différence d'une petitesse énorme, il n'est pas possible qu'elle convienne à ces grandeurs : car l'on pourra toujours démontrer qu'elles approchent l'une de l'autre plus près que de la quantité ou de la différence assignée. Or, quand on ne peut pas assigner de différence entre deux grandeurs, & que l'on aperçoit d'ailleurs que la différence que l'on assigneroit peut diminuer sans fin, non-seulement jusqu'à échapper aux sens, mais même à l'imagination, il faut nécessairement convenir que ces grandeurs sont égales; puisqu'elles des grandeurs inégales auroient une différence absolument déterminée.

Quoique cette vérité soit très-luminieuse, & que la démonstration en soit simple, & suffisamment

convaincante, nous n'avons pas cru devoir nous en tenir à cette unique exposition. Si les vérités mathématiques ne sont pas toujours éclairées de la vive lumière des premiers axiomes, au moins on ne leur a jamais contesté l'avantage de porter dans l'ame une conviction parfaite : c'est pourquoi, afin de parvenir à ce but par différens côtés, nous allons faire part à nos Lecteurs de deux nouvelles Propositions, qui suffiroient toutes seules à établir la méthode d'Exhaustion d'une manière incontestable.

PROPOSITION PREMIERE.

433. Si deux grandeurs A, B sont la limite (a) d'une même quantité C, ces deux grandeurs seront égales entr'elles.

DÉMONSTRATION.

Deux grandeurs sont égales entr'elles, quand on ne peut pas leur supposer de différence, sans tomber en contradiction : or il n'est pas possible, sans tomber en contradiction, de supposer une différence entre les grandeurs A, B, qui sont la limite de la même quantité C. Car, si l'on veut qu'il y ait une différence entre ces grandeurs, supposons que A surpasse B de la quantité D ; donc $A = B + D$: mais (supp.) B est la limite de C, c'est-à-dire que C peut approcher de B plus près que d'une grandeur donnée, sans néanmoins pouvoir la surpasser ; par conséquent C sera toujours éloigné de la quantité $B + D$ au moins de la grandeur D.

(a) *Limite.* On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite que l'on la puisse supposer. En sorte que la différence d'une quantité à sa limite est absolument inassignable.

Or $B + D = A$; donc C fera toujours éloigné de la grandeur A au moins de la quantité D , ce qui est contre la première supposition; puisque A étant la limite de C , il est nécessaire que la grandeur C approche de A plus près que d'une quantité quelconque. On ne sauroit donc supposer une différence entre deux grandeurs qui sont la limite d'une même quantité, sans tomber en contradiction; ainsi ces deux grandeurs sont nécessairement égales; C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

434. Soit $A \times B$ le produit des deux grandeurs A, B . Supposons que C soit la limite de la grandeur A , & D la limite de la quantité B . Je dis que $C \times D$, produit des limites, sera nécessairement la limite de $A \times B$, produit des deux grandeurs A, B .

DÉMONSTRATION.

Car, puisque A peut approcher de C aussi près qu'on veut, & que B peut aussi approcher de D aussi près qu'on veut; donc le produit $A \times B$ des deux grandeurs A, B approchera de $C \times D$, produit de leurs limites, aussi près qu'on voudra. Or, quand un produit approche d'un autre produit aussi près qu'on veut, le second produit est la limite du premier. Par conséquent le produit $C \times D$ des limites, est la limite du produit $A \times B$ des deux grandeurs A, B .

COROLLAIRE.

435. On prouvera de même que, si l'on a tant

362 DE LA SOLIDITÉ
de grandeurs que l'on voudra A, B, F, G, &c.
dont les limites soient C, D, E, H, &c. le pro-
duit CDEH de toutes les limites sera nécessaire-
ment la limite du produit $A \times B \times F \times G$ de tou-
tes les grandeurs proposées.

R E M A R Q U E.

436. Ces deux Propositions renferment tout
l'esprit de la méthode d'Exhaustion. Appliquons-les
à la mesure du cercle. Quand il a été question de
cette mesure (n°. 202), nous avons tâché de faire
comprendre qu'il falloit multiplier la demi-circon-
férence par le rayon, afin d'avoir l'aire du cercle;
& pour cela nous avons résolu le cercle en un très-
grand nombre de triangles, qui avoient tous leur
sommet au centre du cercle, & pour base une por-
tion de circonférence si petite qu'elle ne différât
pas sensiblement d'une ligne droite, ce qui rédui-
soit le cercle à un polygone rectiligne; mais cette
considération n'étoit pas rigoureuse. Voyons si la
méthode d'Exhaustion réduira à rien toutes les rai-
sons de douter.

Considérons la figure 5. Pl. 8. où l'on a inscrit
un Polygone, dont on peut multiplier le nombre
des côtés tant que l'on voudra; ainsi que son aire
approche de plus en plus de la surface du cercle
où il est inscrit, sans qu'il puisse jamais surpasser
cette surface; ce qui fait que la surface du cercle
est la limite de celle du Polygone inscrit quelcon-
que. On appelle *Apothème* une perpendiculaire OB
abaissée du centre sur un des côtés SS' du Poly-
gone inscrit. Il est évident que l'aire de ce Poly-
gone inscrit est le produit du demi-périmètre par
l'Apothème. Or la circonférence est la limite du
périmètre, ou, ce qui revient au même, la demi-

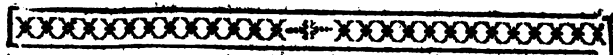
circonférence est la limite du demi-périmètre, & le rayon est la limite de l'Apothème; par conséquent (Prop. II. n°. 434.) le produit de la demi-circonférence par le rayon, c'est-à-dire, le produit des limites, est la limite du produit du demi-périmètre par l'Apothème : mais l'aire du cercle est aussi la limite de ce même produit; donc (Prop. I. n°. 433.) l'aire du cercle est égale au produit de la demi-circonférence par le rayon; puisque deux grandeurs sont nécessairement égales quand elles sont chacune la limite d'une même quantité.

C O R O L L A I R E.

437. Par conséquent, si l'on pouvoit déterminer géométriquement la longueur de la circonférence du cercle, c'est-à-dire, si l'on pouvoit la *rectifier* (a), on auroit, à la rigueur, la quadrature du cercle.

(a). *Rectifier* une courbe, c'est trouver une ligne droite qui lui soit égale.





DE LA TRIGONOMETRIE

Rectiligne par les Sinus.

438. **O**N a cherché avec un très grand soin les propriétés du triangle, il n'y a presque point de figures qui ne puissent s'y réduire. Ainsi l'on peut dire que tout est connu dans une figure, si bizarre qu'elle puisse être, lorsqu'on est parvenu à déterminer les angles & les côtés des triangles, dans lesquels elle peut être résolue.

Quoique nous ayons donné plusieurs méthodes de connoître les côtés & les angles d'un triangle quelconque; cependant, comme notre principal dessein étoit alors d'ouvrir l'esprit des Commencans, ces méthodes leur ont été proposées seulement à cause de la grande facilité qu'il y avoit de les concevoir: car elles sont sujettes à de si grands inconvéniens dans la pratique, que l'on ne sçauroit guères compter sur la précision d'une exécution dont elles seroient le fondement.

Il n'y a rien qui paroisse plus simple que la division d'une échelle; & peut-être, quelque précaution que l'on y prenne, n'y a-t-il rien de plus rare que d'en avoir d'exactes. Quelquefois une ligne de l'échelle est prise pour une lieue sur le terrain; il est très possible que l'on se trompe d'un centième sur une ligne: cette erreur n'est pas discernable aux sens sur une aussi petite étendue; mais la centième partie d'une lieue, représentée par la longueur d'une ligne, est quelque chose de très-considérable: c'est plus de vingt-une toises.

D'un autre côté à combien d'erreurs ne s'expose-t-on pas, en rapportant des angles sur le papier?

Qu'on les fasse tant soit peu plus petits ou plus grands ; que les lignes qui terminent ces angles soient plus ou moins larges : voilà des sources très-fréquentes d'inexactitude.

On s'en apperçoit bientôt, quand on passe de la théorie à la pratique. Aussi les Géomètres d'une antiquité très reculée se sont-ils attachés à la recherche des moyens qui pouvoient diminuer le nombre de ces erreurs.

Comme un triangle n'est composé que de trois angles & de trois côtés, ils soupçonnèrent d'abord qu'il pouvoit y avoir quelque rapport entre ses angles & ses côtés ; parce que dans un Triangle un plus grand angle est nécessairement opposé à un plus grand côté.

En cas que ce rapport fût constant, il en naîtroit un très-grand avantage : ce que l'on auroit calculé pour un triangle l'auroit été pour une infinité d'autres, qui pouvoient lui être semblables ; ils réduisirent donc cette question à *déterminer le rapport qu'il y avoit entre les angles & les côtés d'un Triangle.*

Quoique l'on ne puisse pas comparer un angle à une ligne, c'est à dire, que l'on ne puisse pas se servir immédiatement d'une ligne, pour mesurer un angle ; cependant le rapport d'une ligne à une ligne peut être comparé au rapport d'un angle à un angle : car, s'il y a des lignes doubles, triples, &c. d'autres lignes, il y a aussi des angles qui sont doubles, triples d'autres angles.

439. En conséquence de cette idée on examina, *si les côtés d'un Triangle ne seroient pas entr'eux comme les angles opposés à ces côtés.*

On supposâ donc le triangle isoscèle A B C rectangle (*fig. 145.*) dont le côté A B = le côté A C, & l'angle A est double de l'angle B, ou de

l'angle $C = B$. (n°. 79.) Si les angles d'un triangle étoient entr'eux comme les côtés opposés à ces angles, puisque l'angle A est double de l'angle B , le côté BC , opposé à l'angle A , devoit être double du côté AC opposé à l'angle B ; mais il est évident que le côté BC n'est pas double du côté AC : car le côté AB égalant AC , l'on auroit $BC = AC + AB$, c'est à-dire, que la ligne droite BC seroit égale à la ligne anguleuse BAC , qui a les mêmes extrémités B, C ; ce qui est impossible.

Les angles d'un triangle ne sont donc pas entr'eux comme les côtés opposés à ces angles.

440. Après avoir reconnu qu'il n'y avoit point de proportion constante entre les angles & les côtés d'un triangle, il fut naturel de penser que peut-être il y en avoit une entre les angles & les cordes de ces angles, c'est à-dire, que les angles d'un triangle pouvoient être entr'eux comme les cordes de ces angles.

On circoncrivit donc un cercle à un triangle isocèle ABC (fig. 145.), que nous supposons encore rectangle en A ; & remarquant que la corde d'un angle étoit la même chose que la corde de l'arc qui mesure cet angle, comme l'angle à la circonférence est mesuré par la moitié de l'arc qui passe entre ses côtés (n°. 104.), on s'aperçut que DC étoit la corde de l'angle BAC , après avoir tiré AD qui passe par le centre. Or il est visible que $DC = AC$: ainsi AC est la corde de l'arc qui mesure l'angle A .

De même l'angle B à la circonférence a pour mesure la moitié AO de l'arc AOC , qui passe entre ses côtés: ainsi la corde de l'angle B est la ligne AO ; par conséquent, si les angles d'un triangle étoient entr'eux comme leurs cordes corres-

pondantes, on auroit cette proportion : l'angle A est à l'angle B, comme AC corde de l'angle A, est à AO corde de l'angle B : mais (supp.) l'angle A est double de l'angle B ; donc la corde AC de l'angle A seroit double de la corde AO de l'angle B : cependant il est bien évident que AC n'est pas double de AO ; si cela étoit, à cause de $AO = OC$, la ligne droite AC vaudroit la ligne anguleuse AOC ; cela n'est pas possible.

Les angles d'un triangle ne sont donc pas entr'eux comme les cordes correspondantes.

Que les angles d'un triangle ne soient pas entr'eux comme leurs cordes correspondantes, cela est assez facile à présumer ; parce que les angles ne sont pas mesurés par leurs cordes ; mais par des arcs qui sont des lignes courbes. Il seroit pourtant possible à la rigueur que des lignes courbes eussent entr'elles le même rapport que des lignes droites, comme deux circonférences de cercle ont entr'elles le rapport de leurs diamètres ; cependant, comme on peut faire des triangles avec toutes sortes d'angles, & que l'on ne connoît point le rapport de deux arcs de cercle quelconques indéterminés, il paroîtroit difficile que les arcs, qui sont la mesure de ces angles, eussent toujours un rapport exprimable par celui de leurs côtés.

441. Mais ne pourroit-on pas comparer les côtés non aux angles, mais aux cordes de ces angles, qui sont des lignes droites ? Cela paroît plus vraisemblable. Examinons donc, si les côtés d'un triangle ne seroient pas entr'eux comme les cordes des angles opposés à ces côtés.

Supposons le triangle ABC rectangle en B, (fig. 146.) dont un des côtés AB soit égal au rayon du cercle, qui lui est circonscrit ; ce côté est donc la moitié du diamètre AC, hypoténuse de

ce triangle ; & de plus il est la corde d'un angle ou d'un arc de 60 degrés (par la Dém. du n°. 119.). Du centre O abbaïssons la perpendiculaire OMT, qui coupe la corde AB & l'arc ATB en deux parties égales (n°. 122.). Tirons la corde BT : elle est sous-tendante d'un arc de 30 degrés ; & par conséquent c'est la corde de l'angle BCA, lequel ayant son sommet à la circonférence, a pour mesure l'arc TB, moitié de l'arc ATB qui passe entre ses côtés (n°. 104.). Par la même raison DC, corde du quart de cercle, est la corde de l'angle droit ABC.

Si l'on veut donc que les côtés d'un triangle soient entr'eux comme les cordes des angles opposés à ces côtés, on aura cette proportion : le côté AC est au côté AB, comme la corde DC de l'angle ABC est à la corde BT de l'angle BCA : or AC est double de AB ; donc la corde DC devoit être double de la corde BT.

Appellons r le rayon $OB = AB = OC = OD = OT$: à cause du triangle COD isoscèle rectangle, $\overline{DC}^2 = rr + rr = 2rr$ (n°. 293.) ; ainsi la corde $DC = \sqrt{2rr}$.

Cherchons présentement l'expression de la corde BT : considérons le triangle rectangle BMO ; nous aurons $\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{BM}^2$; donc $\overline{OB} - \overline{BM} = \overline{OM}$: mais $OB = r$ & $BM = \frac{r}{2}$; ainsi $rr - \frac{rr}{4} = \overline{OM}^2 = \frac{3rr}{4}$ (en donnant la même dénomination aux deux termes $rr - \frac{rr}{4}$) ; par conséquent $OM = \sqrt{\frac{3rr}{4}}$; donc $MT = OT - OM$ devient $= r - \sqrt{\frac{3rr}{4}}$.

Considérons

Considérons encore le triangle rectangle BMT ; nous aurons $\overline{\text{BT}} = \overline{\text{BM}} + \overline{\text{MT}} = \frac{r}{4} + \frac{r}{4} - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}} + \frac{3rr}{4}$; (en mettant les valeurs des lignes (BM , MT) ce qui se réduit à $\overline{\text{BT}} = 2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$; & par conséquent $\text{BT} = \sqrt{2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}}$. Nous avons déjà trouvé que la corde $\text{DC} = \sqrt{2rr}$; par conséquent , si DC étoit double de BT , on auroit $\frac{\sqrt{2rr}}{2} = \sqrt{2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}}$; donc , en quarrant l'un & l'autre membre , $\frac{2rr}{4}$ ou $\frac{rr}{2} = 2rr - 2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$. Donc $\frac{rr}{2} - 2rr = -2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$. Mais $\frac{rr}{2} - 2rr = \frac{rr}{2} - \frac{4rr}{2} = -\frac{3rr}{2}$; (en donnant la même dénomination) par conséquent $-\frac{3rr}{2} = -2r\sqrt{\frac{3rr}{4}}$; donc , en quarrant l'un & l'autre membre , on aura $\frac{9r^4}{4} = 3r^4$; (& multipliant l'un & l'autre membre par 4) l'équation devient $9r^4 = 12r^4$. Enfin , divisant par r^4 , on a l'équation $9 = 12$. Ce qui est absurde.

M. le P. Fétý , Minime , ancien Professeur de Mathématiques à l'École de Dessin & de Mathématiques de la Ville de Reims , très-célèbre & très-digne de l'être par ses belles & utiles connoissances dans la science des Hydrauliques , ayant eu

la bonté de me faire connoître combien cette Démonstration coûtoit aux Commençans, je m'appliquai sur le champ à la recherche d'une autre que je vais exposer. (*fig. 146.*)

II. DÉMONSTRATION.

Après avoir transporté BT de C en S , & abaissé OLR perpendiculairement sur DC , pour avoir CL moitié de CD , & l'angle DCS ou LCS de 30^d parce qu'il a pour mesure la moitié de l'arc $DS = 60^d$ (const.) car l'arc $DS = CD - CS = 90 - 30$ (const.) $= 60^d$ menons OS , qui donne l'angle ROS de 15^d étant mesuré par l'arc $RS = CR - CS = 45 - 30$ (const.) $= 15^d$ & traçons LS .

Maintenant, si la corde DC étoit double de BT , elle le feroit de $CS = BT$ (const.) : ainsi CL , moitié de DC , égalerait CS ; donc le triangle CLS feroit isoscèle, & l'on auroit l'angle $CLS = CSL$; ainsi l'angle LCS étant de 30^d comme on l'a vû, les deux angles CLS , CSL auroient chacun 75^d (n°. 67. Géom. T. 1.); donc l'angle CLR étant droit (const.), l'angle SLR n'auroit que 15^d ; ainsi il seroit égal à l'angle ROS , que l'on a vû être aussi de 15^d ; donc l'angle SLR , extérieur au triangle OLS , seroit égal à l'un des angles intérieurs opposés ROS de ce triangle, ce qui est impossible; (Cor. du n°. 65. Géom. T. 1.) donc, &c.

Ayant fait part de cette nouvelle Démonstration à M. le P. Féry, il m'en communiqua une de son invention, qui mérite bien d'avoir ici sa place. La voici telle que j'ai pû me la rappeler : car il y avoit bien un an qu'il m'en avoit tracé la figure, qui fut effacée sur le champ.

III. DÉMONSTRATION

DE M. LE P. FÉRY.

Il élève perpendiculairement le rayon OD , & il mène la corde AD de l'angle droit (*fig. L. PL. 18.*); alors, si AD étoit double de la corde BT , cette corde BT égalerait la moitié de AD . Or cela est impossible : car l'arc $ATBD$ étant de 90^d , l'arc ATB de 60 , & l'arc BT de 30^d (const.), les arcs AT , BD sont nécessairement chacun de 30^d , & par conséquent la corde BT est parallèle à AD ; puisqu'alors les angles TBA , BAD , alternes internes, sont égaux, ayant chacun pour mesure la moitié d'arcs égaux AT , BD : mais OT étant (const.) perpendiculaire sur AB , ainsi que l'est BC , il s'ensuit que OT est parallèle à BC ; & comme les parallèles entre parallèles sont égales, on voit que la corde $BT = RS$. Donc, si BT égaloit la moitié de AD , la ligne RS seroit aussi la moitié de AD , ce qui est absurde, n'étant que la moitié de AS partie de AD , puisqu'à cause des triangles semblables, ABS , AMR , $AM.MB :: AR.RS$: or, (const.) $AM = MB$, donc $AR = RS$; donc RS , moitié de AS , ne peut pas l'être de AD ; C. Q. F. D.

On ne peut donc pas supposer, que les côtés d'un triangle soient entr'eux comme les cordes des angles opposés à ces côtés, sans tomber en contradiction.

442. Enfin on a remarqué, que les côtés d'un triangle étoient entr'eux comme les cordes du double des angles opposés à ces côtés.

Car, en circonscrivant un cercle au Triangle ADB (*fig. 147.*), il est évident que chaque côté est la corde d'un angle double de celui auquel

A a ij

ce côté est opposé ; puisque l'angle D , par exemple , qui a son sommet à la circonférence , n'est que la moitié de l'angle , qui auroit pour mesure l'arc $A O B$, dont le côté $A B$ est la corde.

443. Une observation aussi simple ne paroît pas d'abord devoir procurer de grandes commodités ; cependant les premiers Géomètres réfléchissant sur ce qui pouvoit en résulter , trouvèrent qu'en déterminant en nombre la valeur de toutes les cordes des angles , on pourroit connoître avec une extrême facilité les côtés & les angles d'un triangle , dont un côté & deux angles seroient donnés , ou deux côtés & un angle , où enfin les trois côtés.

Pour le faire comprendre par un seul exemple , avant d'entrer dans un détail que nous donnerons bientôt , supposons que l'on connoisse les deux angles A , B , & le côté $A B$ du triangle $A D B$ (*fig. 147.*) ; je dis qu'avec une simple règle de trois , il sera facile de découvrir la valeur des deux autres côtés $A D$, $D B$, & l'angle D : car , 1°. les deux angles A , B d'un triangle étant connus , le troisième D l'est nécessairement ; vous n'avez maintenant qu'à faire cette proportion : *la corde du double de l'angle D , est à la corde du double de l'angle B , comme le côté $B A$ opposé à l'angle D , est au côté $D A$ opposé à l'angle B* : or , en supposant que l'on ait déterminé en nombres les cordes de tous les angles comme on l'a exécuté effectivement , les trois premiers termes de cette proportion sont connus ; donc le quatrième terme est aussi trouvé.

Par le même moyen on déterminera le côté $D B$.

444. On voit donc avec quelle facilité on parviendroit à connoître tous les angles & tous les côtés d'un triangle , si l'on avoit en nombres une table de toutes les cordes des angles ; & c'est à quoi les

Géomètres de ces derniers siècles se sont appliqués avec beaucoup de soin : mais au lieu de calculer, comme les Anciens, la valeur des cordes de tous les angles, ils ont trouvé plus de commodité à calculer la valeur de la moitié des cordes ; ce qui revient au même que de calculer les cordes, parce que *les cordes sont entr'elles comme leurs moitiés.*

445. Considérons le triangle inscrit ABC (fig. 148.). Nous venons de voir que *les côtés d'un triangle étoient entr'eux comme les moitiés des cordes du double des angles opposés à ces côtés.* Du centre O sur le côté AC abaissons la perpendiculaire OSD , & tirons le rayon OC . 1°. La corde AC est coupée par la moitié au point S . 2°. L'arc ADC est aussi coupé en deux au point D (n°. 222.) ; ainsi l'angle COD est égal à l'angle B situé à la circonférence (n°. 104) : mais l'on a appelé *le Sinus d'un angle*, par exemple de l'angle COD , une perpendiculaire CS abaissée de l'extrémité C de l'arc CD qui mesure cet angle, sur le rayon OD , qui passe par l'autre extrémité D du même arc ; par conséquent l'angle COD étant égal à l'angle B , la perpendiculaire CS est aussi le Sinus de l'angle B : or CS n'est que la moitié de CA , corde du double de l'angle B ; *le Sinus d'un angle n'est donc que la moitié de la corde du double de cet angle.*

446. Mais il a été démontré que les côtés d'un triangle étoient entr'eux comme la moitié des cordes du double des angles opposés à ces côtés ; puis donc que les moitiés des cordes du double de ces angles sont la même chose que les Sinus de ces angles, il s'ensuit que *les côtés d'un triangle sont entr'eux comme les Sinus des angles opposés à ces côtés.*

447. La découverte de cette vérité occasionna le calcul des Tables des Sinus. Il fut aisé d'aperce-

voir que les sinus des angles aigus croissoient à mesure que ces angles devenoient plus grands, & qu'ainsi l'on pouvoit déterminer le rapport de ces sinus. Le sinus BS (*fig. 149.*) de l'angle BOA , est plus petit que le Sinus CT de l'angle COA ; & si l'angle COA devenoit l'angle droit DOA , son sinus seroit le rayon DO , qui est le plus grand de tous les sinus; & c'est pour cela qu'on l'a appelé *sinus total*.

448. Comme les angles obtus, tel que l'angle BOM , sont plus grands que l'angle droit DOA , on ne conçoit pas d'abord que le sinus de l'angle droit soit le plus grand de tous les sinus; mais on remarque bientôt que le sinus BS de l'angle aigu BOA , n'est pas différent du sinus de l'angle obtus BOM , qui est *son complément à deux droits* (*a*); puisque la perpendiculaire BS étant la moitié de la corde du double de l'angle obtus BOM , comme on le voit en prolongeant BS jusqu'en G , il faut qu'elle soit le Sinus de cet angle obtus (*n^o. 445.*).

449. Deux angles différens peuvent donc avoir le même sinus; c'est pourquoi dans la résolution des triangles on est obligé d'établir un caractère, qui fasse discerner auquel des deux angles appartient un sinus trouvé.

450. Puis donc que le sinus de l'angle droit est le plus grand de tous les sinus, il suffit de déterminer en nombre les sinus des angles depuis un degré jusqu'à 90, afin d'avoir le rapport de ces Sinus.

Pour y parvenir, on a supposé que le sinus total, ou le sinus de l'angle droit (qui n'est pas différent du rayon du cercle avec lequel on mesure un angle quelconque); on a supposé, dis je, que le sinus total fût divisé en dix millions de parties éga-

(a) *Complément à deux droits*; c'est ce qu'il faut ajouter à un angle, afin qu'il soit égal à deux angles droits.

les ; ce qui est très-possible , à cause que l'on peut prendre le rayon du cercle , qui sert à mesurer les angles , aussi long qu'il en est besoin. (Nous dirons plus bas , pourquoi on le suppose divisé en un si grand nombre de parties égales.) On a cherché ensuite à déterminer géométriquement combien le sinus de chaque angle & de chaque minute d'angle contenoit de parties du sinus total. Après avoir fait cette détermination , on a rangé en colonne la valeur numérique de tous les angles & de leurs minutes , relativement au sinus total ; & c'est ce qu'on appelle les *Tables des Sinus*. Quand on veut trouver par leur moyen la valeur des côtés ou des angles d'un triangle , on dit que l'on fait usage de la *Trigonométrie par les Sinus*.

451. Afin que l'on prenne une idée de la manière dont les tables des sinus ont été construites , soit l'angle BOC de 30 degrés. (fig. 150.) Faites l'arc $BA = BC$: l'arc CBA est de 60 degrés ; la corde AC de cet arc est donc égale au rayon du cercle (n°. 119.) , ou au sinus total (n°. 447.) = dix millions ou 10000000. (supp.). Or le sinus DC de l'angle BOC de 30 degrés , est la moitié de la corde du double de cet angle , c'est à-dire est la moitié de la corde AC (n°. 445.) ; par conséquent le sinus DC de l'angle de 30 degrés = cinq millions ou 5000000.

Sur le diamètre BS élevez le rayon perpendiculaire OM : il est évident que l'angle $COM = 60$ degrés : du point C abaissons la perpendiculaire CP sur le rayon OM . Cette perpendiculaire CP est le sinus de l'angle COM de 60 degrés , (n°. 445.) qui est le complément à un droit (a) de l'angle BOC de 30 degrés.

(a) Complément à un droit ; c'est ce qu'il faut ajouter à un angle , afin que sa valeur soit égale à celle d'un angle droit.

376 DE LA TRIGONOMETRIE

Le sinus d'un angle étant trouvé, il est facile de connoître la valeur de son complément à un droit. On n'a qu'à se rappeler la fameuse propriété du triangle rectangle (n°. 293.), & considérer le triangle rectangle $CO D$, où l'on connoît l'hypothénuse CO (sinus total), & le côté DC , moitié de cette hypothénuse ou du sinus total, d'où l'on tire

cette équation, $\overline{CO} = \overline{DO} + \overline{DC}$. Ainsi $\overline{CO} - \overline{DC} = \overline{DO}$; & par conséquent $DO =$

$\sqrt{\overline{CO} - \overline{DC}}$; or $DO = CP$, sinus du complément à un droit de l'angle BOC ; donc CP

$= \sqrt{\overline{CO} - \overline{DC}}$, c'est-à-dire, que le sinus CP de 60 degrés est égal à la racine quarrée de la différence qu'il y a entre le quarré du sinus total & le quarré de la moitié de ce sinus. En exprimant le sinus CP numériquement, on le trouvera $= 8660254$ parties du sinus total, qui en contient dix millions.

452. Par la connoissance du sinus du complément d'un angle à un droit, on parvient facilement à celle du *sinus versé* d'un angle. On entend par *sinus versé* d'un angle, par exemple, de l'angle BOC , la partie BD du diamètre, comprise entre le sinus CD de cet angle & l'extrémité B de l'arc BC qui en est la mesure: c'est pourquoi, afin de mieux distinguer dans le discours le sinus versé BD du sinus CD , on appelle ce dernier *sinus droit*.

453. Nous avons fait remarquer (n°. 448.) que le sinus droit CD de l'angle BOC étoit le même que le sinus de l'angle obtus COS , complément à deux droits de l'angle BOC ; mais les sinus versés de ces deux angles sont fort différens: car BD étant

le Sinus versé de l'angle BOC , DS sera le sinus versé de l'angle obtus COS . (n^o. 452.)

Quoique l'on n'ait pas besoin des sinus versés dans la résolution d'un triangle, nous n'avons pas voulu négliger de les faire connoître. La considération de ces lignes peut être utile dans d'autres parties des Mathématiques.

Ainsi, quand on voudra déterminer en nombres le sinus versé BD d'un angle BOC , après avoir connu la valeur de son sinus droit DC , & du sinus $CP = OD$ de son complément à un droit, du sinus total OB on retranchera le sinus OD de son complément à un droit, & le reste BD sera la valeur du sinus versé de l'angle aigu BOC ; ou, s'il s'agit de connoître le sinus versé de l'angle obtus COS , complément à deux droits de l'angle BOC , on ajoutera le sinus total $OB = OS$, au sinus $OD = CP$: cette somme sera le sinus versé de l'angle obtus COS .

On a vû que dans la détermination en nombre des sinus il falloit extraire des racines quarrées. Ces racines sont rarement exactes; il y a presque toujours quelque reste: c'est pourquoi on a supposé que le sinus total fût divisé en un très-grand nombre de parties, afin de les rendre d'une petitesse si énorme, que l'on pût négliger, sans aucun inconvénient, ce qui manqueroit à la racine quarrée des nombres, qui désignent la valeur des sinus.

Après avoir déterminé en nombre les sinus de tous les angles & de leurs minutes, par des voies approchantes de celles que nous venons de tenir par rapport à l'angle de 30 degrés, on a fait une table de tous ces sinus, afin que l'on pût les trouver facilement au besoin, ainsi que nous l'avons déjà dit.

Quand nous en ferons à la résolution des Problèmes, je ferai voir qu'avec la seule connoissance

378 DE LA TRIGONOMÉTRIE

des sinus, on peut les résoudre tous sans aucune exception, & qu'ainsi la théorie de la Trigonométrie consiste en cette unique proposition si simple, *les côtés des triangles sont entr'eux comme les sinus des angles opposés à ces côtés.*

454. Cependant, comme la pratique des Sciences & des Arts tire la perfection de la brièveté du tems que l'on emploie à une opération, les Géomètres ne furent point parfaitement contents d'une résolution, qui ne leur paroïssoit pas avoir toute l'élégance dont elle étoit susceptible.

Ils s'attachèrent donc à la contemplation de certaines lignes, dont la détermination en nombres, toujours relativement au sinus total, leur apporta beaucoup de commodités, parce qu'elles diminuoient considérablement le tems des opérations; il est par conséquent à propos que nous fassions connoître ces lignes. (*fig. 151.*)

Reprenons l'angle COB de 30 degrés, dont nous avons déterminé en nombres le sinus droit CD. A l'extrémité B de l'arc BC, qui mesure cet angle, tirons la tangente BG bornée par la ligne OG, qui passe par l'autre extrémité C de ce même arc. La ligne BG est *la tangente* de l'arc BC, ou de l'angle BOC, & la ligne OG en est *la sécante*.

Pareillement MS est la tangente de l'arc CM, ou de l'angle COM, & la ligne OS est la sécante de ce même angle.

Le sinus droit CD de l'angle BOC, & le sinus CP = OD de son complément à un droit étant connus, on détermine très-facilement en nombres la valeur de la tangente BG & de la sécante OG de ce même angle; car, à cause des deux parallèles CD, BG, on a cette proportion : OD ou CP sinus du complément à un droit, est à DC sinus droit, comme OB sinus total, est à BG tangente

de l'angle BOC : or les trois premiers termes de cette proportion sont connus ; donc le quatrième terme, ou la tangente BG , est aussi connu.

La sécante OG de ce même angle se découvre avec la même facilité ; il n'y a qu'à faire cette proportion : le sinus du complément à un droit OD ou CP , est au sinus total OC , comme le même sinus total $OB = OC$, est à la sécante OG ; cette sécante est donc une quatrième proportionnelle à trois termes connus, & par conséquent elle est déterminée. On déterminera de même la tangente MS , & la sécante OS de l'arc CM ou de l'angle COM , complément à un droit de l'angle BOC . En ce cas, pour abréger le discours, quand on veut faire connoître que l'on parle du sinus, de la tangente & de la sécante du complément d'un angle à un droit, on fait usage des mots *co-sinus*, *co-tangente*, *co-sécante* ; ainsi CP est le co-sinus de l'angle BOC , la ligne MS en est la co-tangente, & OS la co-sécante.

Quand on a eu déterminé en nombres la valeur de la tangente & de la sécante de chaque angle, on a disposé ces valeurs dans les tables des sinus, vis-à-vis celle des sinus correspondants ; on y a même ajouté les Logarithmes des sinus & des tangentes, afin que l'on pût faire par l'addition & la soustraction ce que l'on exécute communément avec la multiplication & la division. On n'y a pas mis les Logarithmes des sécantes, parce que ces lignes ne rendant pas plus élégante la résolution des Problèmes de la Trigonométrie, on s'en passe absolument.

Les tables des sinus, dont je vais faire usage, sont les tables d'Wlac, corrigées par M. Ozanam ; elles passent pour être fort exactes, & on les trouve par-tout. Voici la disposition des différentes parties qui composent ces tables. On a marqué au

haut de chaque page les degrés d'un angle, & l'on voit au-dessous six colonnes verticales. La première colonne contient les minutes de l'angle marqué à cette page; on trouve à la seconde les sinus; les tangentes à la troisième; ce sont les sécantes à la quatrième; les Logarithmes des sinus à la cinquième; enfin on voit à la sixième les Logarithmes des tangentes.

Comme l'on a besoin assez souvent des co-sinus & des co-tangentes des angles, en ouvrant les tables des sinus, si l'on prend les degrés d'un angle à gauche, on trouve à la page de la droite les degrés de son complément à un droit, avec son co-sinus, sa co-tangente, sa co-sécante, &c. Par exemple, vous avez besoin du sinus d'un angle de 26 degrés 13 minutes; cherchez la page au haut de laquelle est écrit 26 degrés, & où la colonne des minutes commence par 0 : descendez cette colonne depuis 1 minute jusqu'à 13 minutes. A côté de ce nombre, en allant horizontalement de gauche à droite, on trouve 44176. 68; c'est le sinus d'un angle de 26 degrés 13 minutes. Après cela vient le nombre 49242. 24, qui exprime la tangente de ce même angle. Ensuite le nombre 111466. 58 marque la valeur de la sécante. (le point qui sépare les deux chiffres les plus à la droite, signifie que l'on peut négliger ces chiffres sans un grand inconvénient.) Allez toujours de gauche à droite sur la même ligne horizontale, vous voyez que le Logarithme du sinus de cet angle est 9. 6451931, & celui de sa tangente est 9. 6923378. Le premier nombre 9 à la gauche marque un nombre entier, & tous les autres chiffres, qui en sont séparés par un point, forment le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur est 1 suivi d'autant de zéros que son numérateur a de chiffres; ainsi le nombre 9.

6923378 est la même chose que $9 +$ la fraction $\frac{6923378}{10000000}$ (n^o 79. *Algéb.*). Tout de suite à la page droite, au haut de laquelle est écrit 63 degrés, dans la première colonne verticale qui marque les minutes, on trouve 47 minutes; parceque 63 degrés 47 minutes sont le complément à un droit de 26 degrés 13 minutes: car en ajoutant 63 degrés 47 minutes à 26 degrés 13 minutes, on a 90 degrés, valeur de l'angle droit. Dans cette page de la droite, les sinus, les tangentes, &c. ont la même disposition qu'à la page de la gauche; & par conséquent on les trouvera, ainsi que nous l'avons expliqué.

455. Quand il s'agira de trouver l'angle d'un sinus donné, on cherchera dans les tables le nombre qui exprime ce sinus; ce nombre trouvé fera connoître l'angle qui lui répond. On veut sçavoir, par exemple, à quel angle appartient le sinus 55653.73: en feuilletant les tables, on trouve que ce nombre est le sinus d'un angle de 33 degrés 49 minutes.

Ceux qui seront curieux de voir plus particulièrement l'artifice de ces tables, pourront consulter le P. de Chales, Ozanam, M. Wolf. Ces Auteurs ayant donné des *Cours de Mathématiques*, ont traité au long de la construction & de l'usage des tables des sinus; pour nous qui avons un tout autre dessein, il nous a suffi d'en donner une idée.

456. Cette idée est totalement renfermée dans ce petit nombre de mots: *Les tables des sinus ne sont rien autre chose qu'un triangle rectangle, dont on a déterminé le rapport des trois côtés, en supposant un de ces côtés divisé en dix millions de parties égales.* Car (fig. 150.) lorsque nous avons déterminé le sinus de l'angle BOC de 30 degrés, on a pu remarquer que le sinus total ou le rayon OC, est l'hypothé-

nusé du triangle rectangle CDO ; que le sinus droit CD de cet angle est un des côtés du même triangle ; & qu'enfin l'autre côté $OD = CP$ est son co-sinus ou le sinus de son complément à un droit.

Il a donc fallu seulement calculer autant de triangles rectangles qu'il y a eu de sinus droits à déterminer ; parceque le même triangle , qui sert à faire trouver le sinus droit d'un angle , fait aussi connoître le co-sinus de cet angle , c'est-à-dire , le sinus du complément de cet angle à un droit.

457. Ainsi , quelque longueur que l'on suppose aux côtés d'un angle connu , on est toujours sûr , par le moyen des tables , d'avoir en nombres le rapport du sinus droit de cet angle à son sinus total ; puisqu'il est très-aisé de démontrer , que les sinus des angles du même nombre de degrés sont entr'eux , comme le sinus total de l'un est au sinus total de l'autre. Regardez la figure 152. L'arc BOC est , à la vérité , plus grand que l'arc boc ; mais , comme le grand arc BOC est la même partie de sa circonférence entière que le petit arc boc l'est de la sienne , on aura cette proportion : le sinus total AC est au sinus droit BD , comme le sinus total Ac est au sinus droit bd .

Pour en-êtré convaincu , tirons les cordes BC , bc . Il est évident que les triangles ABC , Abc sont équiangles ou semblables : ainsi $AC . Ac :: BC . bc$; mais les triangles rectangles BDC , bdc sont aussi semblables ; donc $BC . bc :: BD . bd$; par conséquent ces deux proportions produisent cette suite de rapports égaux , $AC . Ac :: BD . bd$; ou , en alternant , $AC . BD :: Ac . bd$; $C . Q . F . D$.

458. Nous avons présentement toute la théorie , qui sert de fondement à la résolution des Problème de la Trigonométrie. La seule vérité que l'on

doit avoir toujours présente à l'esprit, est que *les sinus des angles sont entr'eux comme les côtés opposés à ces angles*; d'où il est facile de juger, que l'on ne parvient à l'analyse ou à la résolution d'un triangle qu'à l'aide des proportions.

Or pour déterminer tous les termes d'une proportion, il faut absolument qu'il y en ait trois qui soient connus; c'est pourquoi, quand on cherche à connoître les côtés & les angles d'un triangle, (ce qui s'appelle *en faire l'analyse ou en donner la résolution*) s'il n'y a pas trois choses au moins connues dans ce triangle, la résolution en est impossible. Quelquefois même trois ne suffisent pas. Il est bien vrai que les trois côtés d'un triangle en déterminent les angles, comme nous le démontrerons; mais la connoissance des trois angles ne suffit pas à la détermination des trois côtés. Qui est ce qui ne voit pas qu'il y a une infinité de triangles semblables dont les angles sont égaux, chacun à chacun, & les côtés fort différens? Nous ferons même remarquer que l'on peut connoître deux côtés & un angle d'un triangle, sans qu'il soit possible d'en déterminer le reste.

RÉSOLUTION de tous les Problèmes de la Trigonométrie par cette Proposition unique : *Dans un triangle, les Sinus des angles sont entr'eux comme les côtés opposés à ces angles.*

459. **C**omme nous allons faire un perpétuel usage du triangle rectangle, on doit se rappeler 1°. Que deux côtés connus dans ce triangle en déterminent nécessairement le troisième. 2°. Que le sinus de l'angle droit est le sinus total.

Ceci supposé. Puisque la Trigonométrie a été principalement inventée, afin de connoître les distances inaccessibles, nous nous attacherons d'abord à déterminer les trois côtés d'un triangle; parceque cette connoissance nous conduira à celle des trois angles. Et pour nous exprimer avec plus de simplicité, nous désignerons le sinus d'un angle par la lettre S, mise à la tête des lettres qui marquent cet angle: ainsi S A B D veut dire le sinus de l'angle A B D. De même S T signifie le sinus total.

P R O B L È M E I.

460. Trouver la distance A C des deux objets inaccessibles A, C. (fig. 153.)

R É S O L U T I O N.

Cherchons un lieu commode où nous puissions mesurer une base B D, à laquelle nous rapporterons nos opérations. Aux extrémités B, D de cette base plaçons successivement le Graphomètre, afin de prendre la valeur des angles A B D, C B D, B D C, B D A; ce qui fera connoître l'angle A D C, qui est la différence de l'angle B D C à l'angle B D A. Après cela considérons le triangle B A D, dans lequel nous connoissons l'angle A B D, & l'angle B D A, d'où l'on déduit la valeur du troisième angle B A D. On suppose de plus que l'on ait mesuré la base B D.

Nous n'avons maintenant qu'à faire cette proportion: le sinus de l'angle B A D connu par les tables, est au sinus de l'angle A B D aussi connu par les tables, comme la base B D, opposée à l'angle B A D, est au côté A D opposé à l'angle A B D; ou plus simplement, S B A D . S A B D :: B D . A D. Or dans cette proportion les trois premiers termes sont connus: car les deux premiers le sont

le font par les tables des sinus, & le troisième est la base BD , que l'on suppose mesurée; ainsi le quatrième terme AD est connu. (n°. 247.).

Voyons présentement ce que nous connoissons dans le triangle BDC . On a pris la valeur des angles CBD , BDC ; ce qui détermine l'angle BCD . Enfin la base BD est connue; par conséquent nous aurons cette proportion, $SBCD$. $SCBD :: BD \cdot CD$, dans laquelle les trois premiers termes sont encore connus; & par conséquent le quatrième terme CD est déterminé.

Ceci nous fait déjà voir qu'un côté d'un triangle étant connu, avec les deux angles formés sur ce côté, l'on peut facilement déterminer les deux autres côtés.

Dans le triangle ADC nous connoissons donc la longueur des côtés AD , CD , & l'angle ADC compris entre ces côtés. Voilà donc le Problème proposé réduit à cet autre Problème.

PROBLÈME II.

461. Les deux côtés AD , CD du triangle ADC étant donnés, avec l'angle ADC intercepté entre ces côtés, trouver le troisième côté AC . (fig. 154.)

RÉSOLUTION.

1°. Si l'angle ADC est un angle droit, on aura (n°. 293.) $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{CD}$. Donc $AC = \sqrt{\overline{AD} + \overline{CD}}$; c'est-à-dire, que pour connoître la distance AC , on extraira la racine carrée de la somme des deux carrés connus $\overline{AD} + \overline{CD}$.

2°. Si l'angle ADC (fig. 155.) n'est pas droit, mais que les côtés AD , CD connus soient égaux,

386 DE LA TRIGONOMÉTRIE

alors le triangle ADC est isoscèle; donc l'angle $A =$ l'angle C ; par conséquent, puisque l'on suppose l'angle D connu, la somme des deux angles A, C sera aussi connue: ainsi la moitié de cette somme donnera la valeur de l'angle A & de l'angle C . Faites donc cette proportion: $SDAC : SADC :: CD : AC$, où les trois premiers termes sont connus; le quatrième AC sera donc déterminé.

3°. Quand les côtés AD, CD connus sont inégaux (*fig. 156.*), & que l'angle ADC intercepté est aigu, de l'extrémité C du plus petit côté CD imaginez la perpendiculaire CM sur le plus grand côté AD , & considérez le triangle rectangle CMD , dans lequel le côté CD , l'angle CDM & l'angle CMD sont connus: d'où l'on déduit la valeur de l'angle MCD ; ce qui donne la proportion suivante: $ST. S MCD :: CD. MD$, dans laquelle les trois premiers termes sont donnés, & par conséquent le quatrième terme MD est connu. Mais (par la supposition) tout le côté AD est connu; ainsi la partie $AM = AD - MD$ sera aussi déterminée. Et, si l'on fait encore cette autre proportion: $ST. SCDM :: CD. CM$, où les trois premiers termes sont donnés, on connoîtra la perpendiculaire CM .

Dans le triangle rectangle AMC on connoît donc les deux côtés AM, MC , qui forment l'angle droit.

Ainsi, puisque $\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC}$, l'on aura

$AC = \sqrt{\overline{AM} + \overline{MC}}$; c'est-à-dire, que la distance AC est égale à la racine quarrée de la somme des deux quarrés connus $\overline{AM} + \overline{MC}$; & par conséquent cette distance est connue.

4°. Quand les côtés AD, CD connus sont inégaux, (*fig. 157.*) & que l'angle ADC inter-

cepté est obtus, de l'angle C imaginez la perpendiculaire CM sur le côté AD prolongé. Dans le triangle CMD rectangle on connoît le côté CD (supp.); l'angle CDM est aussi connu, parce que l'angle ADC est donné; de plus l'angle CMD est droit (const.); donc le troisième DCM est déterminé. Nous aurons donc cette proportion : ST . SDCM :: CD . DM, dans laquelle les trois premiers termes connus feront connoître le quatrième terme DM. Ajoutez cette valeur au côté AD connu (supp.), & toute la distance AM sera entièrement connue.

En considérant encore le triangle rectangle CMD, on déterminera la longueur de la perpendiculaire CM par cette proportion : ST . SCDM :: DC . CM, dans laquelle les trois premiers termes connus donnent la valeur du quatrième CM.

Dans le triangle rectangle AMC on connoît donc les deux côtés AM, CM qui forment l'angle droit : ainsi il est facile de connoître l'hypothé-

nuse AC, en faisant l'équation $\overline{AC} = \overline{AM} +$

\overline{CM} ; d'où l'on tire $AC = \sqrt{\overline{AM} + \overline{CM}}$; ce qui veut dire, que la distance AC est égale à la ra-

cine quarrée de la somme des quarrés $\overline{AM} + \overline{CM}$ connus; cette distance est donc aussi déterminée.

Ainsi, généralement parlant, on peut connoître, par le moyen des sinus, le troisième côté d'un triangle dont deux côtés sont connus, avec l'angle intercepté entre ces deux côtés.

Prenez garde qu'il est nécessaire, pour la résolution de ce Problème, que l'angle ADC connu soit intercepté entre les deux côtés donnés AD, CD. Si cet angle connu, au lieu d'être intercepté,

étoit opposé à l'un des deux côtés donnés, il faudroit avoir recours à quelque autre considération, ainsi qu'on va le démontrer dans le Problème suivant.

PROBLÈME III.

461. Les deux côtés inégaux AD , CD d'un triangle étant donnés, avec l'angle DAC opposé à l'un de ces deux côtés, trouver le troisième côté AC . (*fig. 1, 8.*)

RÉSOLUTION.

Elle est impossible, en s'en tenant simplement aux termes de la question.

DÉMONSTRATION.

Si nous faisons cette proportion, $CD : AD :: \sin DAC$ est au sinus de l'angle opposé au côté AD , dans laquelle les trois premiers termes sont donnés, il est certain que l'on connoîtra le quatrième terme, c'est à-dire, le sinus de l'angle opposé au côté AD ; mais ce sinus peut convenir à deux angles : car nous avons fait remarquer (n°. 448.) que le sinus d'un angle aigu étoit aussi le sinus du complément de cet angle à deux droits; par conséquent les tables des sinus ne font point connoître la valeur de l'angle DCA opposé au côté AD . Cet angle n'étant pas déterminé, il n'est pas possible de connoître l'angle ADC , dont le sinus nous conduiroit à la connoissance du troisième côté AC ; C. Q. F. D.

463. C'est ce qui nous montre que deux triangles peuvent avoir deux côtés égaux, chacun à chacun, avec un angle égal opposé au même côté, & être néanmoins fort différents.

DÉMONSTRATION.

Prenons le triangle ADC (*fig. 1, 8.*), dont

le côté DC est plus petit que le côté DA . Du point D avec le rayon DC décrivons l'arc CO qui coupe le côté AC au point c , & tirons Dc . Il est évident que le triangle ADC a deux côtés égaux à deux côtés du triangle ADc ; puisque AD est un côté commun à ces deux triangles, que le côté $DC =$ le côté Dc (par la const.), & que de plus l'angle A , commun à l'un & à l'autre triangle, est opposé à des côtés égaux. Or, il est visible que le triangle ADC est fort différent du triangle ADc ; par conséquent deux triangles peuvent avoir deux côtés égaux, chacun à chacun, & un angle égal opposé à un côté égal de part & d'autre, sans avoir le troisième côté égal au troisième côté; C. Q. F. D.

464. Cependant, si l'on ajoute aux données du Problème 3. (n°. 462.) l'espèce de l'angle DCA opposé au côté AD , alors ce Problème sera totalement déterminé, quoique l'on ne sache pas la valeur de cet angle.

DÉMONSTRATION.

Supposons que quelques circonstances fassent connaître que l'angle DCA est aigu (fig. 158.), en reprenant la proportion : $CD : AD :: \sin DAC : \sin CDA$, où les trois premiers termes sont connus, on aura la valeur du sinus $SDCA$ que l'on trouvera dans les tables, & par conséquent on trouvera sans équivoque la valeur de l'angle DCA qui répond à ce sinus, à cause que l'on suppose cet angle aigu; & si on le supposoit obtus, l'angle qui répondroit au sinus trouvé, seroit l'angle obtus DcA , complément à deux droits de l'angle aigu DCA .

Par conséquent, selon que l'angle DCA sera aigu ou obtus, le troisième côté AC cherché sera plus grand ou plus petit : car l'angle DCA étant

aigu, l'angle ADC en fera plus grand ; d'où il résulte un plus grand côté AC ; & si l'angle DcA est obtus, l'angle ADc en fera plus petit, ce qui entraîne un plus petit côté Ac (n°. 81.) ;
C. Q. F. D.

Jusqu'à présent nous n'avons eu en vûe que de parvenir à la connoissance des trois côtés d'un triangle, dans lequel un côté & deux angles, ou deux côtés & un angle étoient donnés : il reste encore à faire voir comment l'on peut déterminer les trois angles d'un triangle, dont on connoît la longueur des trois côtés.

PROBLÈME IV.

465. Les trois côtés du triangle ADC étant connus, en déterminer la valeur de chaque angle.
(*fig. 159.*)

RÉSOLUTION.

1°. Si le triangle proposé est équilatéral (*fig. 159.*), les trois angles en sont égaux, & par conséquent chacun vaut le tiers de 180 degrés = 60 degrés.

2°. Quand ce triangle est isoscèle (*fig. 160.*), c'est-à dire, quand on suppose que les deux côtés DA , DC sont égaux, il faut imaginer la perpendiculaire DF abaissée de l'angle D sur le troisième côté AC . On voit bien que cette perpendiculaire tombe sur le milieu du côté AC donné ; par conséquent AF ou FC moitié de AC , est aussi connue ; ainsi le triangle rectangle DFC donnera cette proportion : DC , FC :: ST . $SFDC$, dans laquelle les trois premiers termes connus feront connoître le quatrième terme, qui est le sinus de l'angle aigu $FD C$; cet angle sera donc

connu par les tables, & par conséquent, on aura la valeur du troisième angle C : or l'angle C = l'angle A, parceque le triangle ADC est supposé isoscèle; ainsi l'on pourra connoître le troisième angle ADC.

3°. Si le triangle ADC est scalène (*fig. 161.*), c'est-à-dire, si les trois côtés de ce triangle sont inégaux, on imaginera encore une perpendiculaire CF, abaissée du plus grand angle ACD sur le plus grand côté AD; cette perpendiculaire divisera le côté AD en deux segmens inégaux AF, FD, qu'il faut tâcher de déterminer : car leur détermination fera connoître chacun des angles du triangle proposé.

Quoique nous ayons déjà donné la solution de ce Problème (n°. 297.), nous allons pourtant la répéter; parce que nous en tirerons quelques conséquences, qui nous feront découvrir une abbréviation fort utile dans la pratique. (*fig. 161.*)

Soit donc $AD = a$, $CD = b$, $AC = c$, $AF = x$, $DF = a - x$, $CF = y$; & considérons le triangle rectangle CFA : nous aurons $\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{CF}$, ou $cc = xx + yy$.

Par la même raison, le triangle rectangle CFD nous donne $\overline{CD} = \overline{DF} + \overline{CF}$, ou $bb = aa - 2ax + xx + yy$: substituons dans cette dernière équation cc en la place de $xx + yy$; on aura l'équation suivante $bb = aa - 2ax + cc$; & en transposant, l'on trouve $2ax = aa + cc - bb$; d'où l'on déduit $x = \frac{aa + cc - bb}{2a}$; ce qui signifie que le plus petit

segment AF se détermine, en retranchant le carré du côté CD de la somme des carrés des côtés AD, AC, & divisant le reste par le double du

plus grand côté AD. Quand le petit segment AF est connu, on n'a qu'à le retrancher du grand côté AD; cette soustraction fera connoître le grand segment FD.

Après cela, considérant le triangle rectangle AFC, on aura cette proportion : AC . AF : ST . SACF, qui fera connoître l'angle ACF, & par conséquent l'angle CAD.

De même, le triangle rectangle CFD donne cette proportion : CD . FD :: ST . SFC D; d'où l'on tire la connoissance de l'angle FCD, & par conséquent celle de l'angle CDA.

Dans le triangle ACD on connoît donc à présent l'angle CAD & l'angle CDA; ainsi le troisième angle ACD est connu. La détermination des trois côtés d'un triangle en fait donc connoître les angles; par conséquent, nous sommes parvenus à ce que nous nous étions proposé de trouver; C. Q. F. D.

Quand on veut connoître les angles d'un triangle scalène, dont les trois côtés sont donnés, on voit que toute la difficulté consiste à déterminer l'un des deux segmens AF, FD (*fig. 161.*); & que pour trouver le plus petit de ces deux segmens AF, il faut quarrer le grand côté AD, quarrer aussi le plus petit côté AC, faire une somme de ces deux quarrés, retrancher de cette somme le quarré du côté moyen CD, & enfin diviser ce reste par le double du plus grand côté AD: car le quotient de cette division donne la valeur du plus petit segment AF, ainsi que le montre l'é-

quation $x = \frac{aa + cc - bb}{2a}$. Mais tout cela est d'un assez grand détail. Si l'on pouvoit parvenir à la connoissance de l'un de ces deux segmens par une voie plus courte, la pratique de la Trigonométrie.

en seroit plus parfaite. Essayons donc de trouver quelque moyen qui exige moins de calcul que la manière précédente.

466. Il est évident que les deux segmens A F, F D étant connus, leur différence est aussi connue. Or nous avons trouvé par le calcul précédent que le petit segment A F $= \frac{aa+cc-bb}{2a}$. Ainsi le grand segment F D $= A D - A F = a - \frac{aa+cc-bb}{2a} = \frac{2aa-aa-cc+bb}{2a}$ (en réduisant à la même dénomination); d'où l'on tire, en ôtant ce qui se détruit, le grand segment F D $= \frac{aa-cc+bb}{2a}$. Par conséquent la différence de ces segmens, ou F D $- A F = \frac{aa-cc+bb}{2a} - \frac{aa+cc-bb}{2a} = \frac{aa-cc+bb-aa-cc+bb}{2a} = \frac{2bb-2cc}{2a} = \frac{bb-cc}{a}$; c'est-à-dire, que l'expression de la différence des deux segmens F D, A F est $\frac{bb-cc}{a}$. Appellons d cette différence; on aura donc $\frac{bb-cc}{a} = d$: or $\frac{bb-cc}{a} = \frac{b+c \times b-c}{a}$; ainsi $d = \frac{b+c \times b-c}{a}$; donc $a \times d = b+c \times b-c$, ce qui donne cette proportion: $a . b+c :: b-c . d$; c'est-à-dire, que l'on trouve la différence des deux segmens par cette simple proportion: le plus grand côté A D (a) est à la somme des deux autres côtés C D, A C (b+c), comme la différence C D - A C (b-c) de ces deux mêmes côtés est à un quatrième terme d, qui est la différence cherchée.

Mais, selon les conditions du Problème, la somme A D des deux segmens est donnée, & par cette dernière proportion on trouve leur différence; par conséquent on aura facilement la valeur de chaque segment; puisque (n°. 103. Algèb.) le plus

grand est égal à la moitié de la somme des segmens ; plus la moitié de leur différence , & le plus petit est égal à la moitié de la somme des mêmes segmens , moins la moitié de leur différence.

Ainsi , au lieu de chercher la valeur de l'un des deux segmens , comme nous avons fait d'abord , il sera beaucoup plus expéditif de déterminer la différence de ces segmens , en faisant usage de la proportion $a . b + c :: b - c . d$, que nous venons de trouver par le calcul.

467. Ceux qui seront curieux de voir comment la Géométrie s'accorde ici avec le calcul , n'ont qu'à faire attention à la construction suivante.

Du point C avec le plus petit côté CA (*fig. 161.*) décrivez un cercle , & prolongez DC jusqu'à sa rencontre H avec la circonférence. Il est clair , 1°. que DH est la somme des deux côtés DC , AC , puisque $AC = CH$. 2°. Que DM est la différence de ces deux mêmes côtés DC , AC : car , à cause de $MC = AC$, $DC - AC = DC - MC = DM$. 3°. DT est la différence des segmens DF , AF : on doit se rappeler qu'une perpendiculaire , abaissée du centre d'un cercle sur l'une de ses cordes AT , coupe cette corde en deux parties égales ; ainsi $AF = FT$; par conséquent DT est la différence du grand segment DF au petit segment AF.

Il faut donc démontrer que le plus grand côté DA est à la somme DH des deux autres côtés DC , AC , comme DM , différence de ces deux mêmes côtés , est à DT , différence des segmens DF , AF , faits par la perpendiculaire CF , abaissée du plus grand angle sur le plus grand côté AD.

Or cela est démontré par la seule construction : car (n°. 287. Prop. XXIII.) si d'un point D , pris hors d'un cercle , on tire deux sécantes DA ,

DH, ces lignes entières seront entr'elles réciproquement comme leurs parties DT, DM, qui sont hors le cercle; par conséquent $DA : DH :: DM : DT$; c'est-à-dire, que le plus grand côté DA est à la somme DH ($DC + AC$) des deux autres côtés, comme leur différence DM est à la différence DT des deux segments DF, AF. La Géométrie est donc d'accord avec le calcul, ou peut-être est-ce le calcul qui a fait trouver la construction géométrique.

Nous sommes enfin parvenus à découvrir tous les angles & tous les côtés d'un triangle, dont trois parties sont données, en y joignant quelque caractère particulier, quand certaines circonstances l'exigent; pourvû néanmoins que ce ne soient pas simplement les trois angles: car il n'est pas possible avec cette simple connoissance de déterminer les trois côtés d'un triangle, quoique les trois côtés connus déterminent les angles; il ne nous reste donc plus qu'à faire voir les avantages que l'on a retirés de la contemplation des tangentes.

Utilité des tangentes dans la Résolution des Problèmes de la Trigonométrie par les sinus.

468. **Q**Uoique les tangentes ne soient pas absolument nécessaires à la résolution de ces Problèmes, elles sont pourtant fort utiles. Moins il y a d'opérations à faire, moins aussi les erreurs se multiplient, &, ce que l'on considère beaucoup dans les arts, plus on gagne de temps: or la considération des tangentes réduit quelquefois à deux simples proportions la résolution d'un Problème, que l'on ne pourroit résoudre que par six proportions, si l'on vouloit se borner à l'usage des sinus; & c'est

une proposition unique, qui va nous procurer cet avantage. Mais par compensation, elle paroît très-difficile aux Commençans; beaucoup de personnes même très-versées dans la Géométrie, n'aperçoivent pas les routes qui ont pû conduire les Inventeurs à cette découverte. Nous allons tâcher de faire voir les degrés par où l'on a passé; mais auparavant il faut que nous exposions quelques Préliminaires.

469. C'est le triangle rectangle, qui a été notre moyen de résolution dans les Problèmes précédents; il le sera encore à l'égard de celui qui va suivre. Considérez donc qu'un triangle rectangle ABC étant donné, si l'on prend pour rayon ou pour sinus total un des deux côtés AB , BC , qui comprennent l'angle droit A , l'autre côté sera nécessairement la tangente de l'angle qui lui est opposé. (*fig. 163.*)

DÉMONSTRATION.

Du point C , avec le rayon BC , décrivez l'arc BO ; puisque l'on suppose AB perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB , le côté AB est une tangente au cercle, dont l'arc BO est une partie (*n°. 103.*); par conséquent ce même côté étant déterminé par la sécante CA , qui passe par l'autre extrémité O de l'arc BO qui mesure l'angle BCA , il est clair (*n°. 454.*) que le côté AB est la tangente de l'angle opposé BCA .

On voit aussi que, si du point A avec le rayon AB on décrivait un arc BD , le côté BC seroit la tangente de l'angle BAC , qui lui est opposé: ainsi l'un des deux côtés d'un triangle rectangle étant pris pour le sinus total, l'autre côté est nécessairement la tangente de l'angle qui lui est opposé.

470. Cette observation fournit un moyen très-

simple de connoître tous les angles & l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont on connoît seulement les deux côtés qui comprennent l'angle droit. Supposons que les deux côtés AB , BC du triangle rectangle ABC soient donnés. Pour connoître les deux angles A , C , il n'y a qu'à faire cette proportion, *AB est à BC ; comme le sinus total est à la tangente de l'angle BAC* , dans laquelle les deux premiers termes AB , BC sont donnés, par la supposition; & le troisième est connu par les Tables; on connoîtra donc le quatrième terme, c'est-à-dire, la tangente de l'angle BAC ; par conséquent les Tables donneront la valeur de cet angle, & tout de suite la valeur de l'angle BCA son complément à un droit.

L'hypothénuse AC est présentement fort aisée à déterminer, en disant : *le Sinus de l'angle A est au Sinus total, comme le côté BC est à l'hypothénuse AC* ; dans cette proportion les trois premiers termes sont connus; le quatrième terme, c'est-à-dire, l'hypothénuse AC , est donc nécessairement déterminé.

On pouvoit déterminer autrement cette hypothénuse AC , en tirant la racine quarrée de la somme des deux Quarrés faits sur les deux côtés AB , BC ; mais le calcul seroit beaucoup plus long qu'en faisant usage de la proportion précédente, où le sinus total, exprimé par une suite de zéros précédés de l'unité, abrège considérablement le calcul, soit que ce sinus fasse l'office de multiplicateur, soit qu'il fasse celui de diviseur.

Que l'on se rappelle à présent le Problème 2, où il s'agit de trouver le troisième côté d'un triangle, dont deux côtés inégaux sont donnés avec l'angle intercepté entre ces côtés: si l'on proposoit en même tems d'en trouver les deux autres angles, il est certain que l'on ne pourroit résoudre entière-

ment ce Problème par le moyen des sinus, à moins que l'on n'y employât cinq ou six proportions, au lieu que deux seules proportions feront tout connoître, en suivant le chemin que nous allons montrer.

471. Soit donc le triangle ABC (*fig. 164.*) dont on connoît les deux côtés inégaux AB , BC , avec l'angle ABC intercepté entre ces côtés; il s'agit d'en déduire la connoissance des deux autres angles BAC , BCA , & celle du troisième côté AC .

Rendons-nous bien attentifs à cette question.

1°. Nous connoissons les deux côtés AB , BC ; leur somme est donc connue, & nous pouvons l'exprimer par la seule ligne CM , en faisant le prolongement $BM = AB$. Que l'on tire maintenant la ligne MA ; on aura le triangle isocèle ABM .

2°. L'angle ABC est donné (*supp.*); donc l'angle ABM , son complément à deux droits, est connu: de plus cet angle ABM est extérieur au triangle ABC ; il vaut donc la somme des deux angles inconnus BAC , BCA (*n°. 65.*), qui sont formés sur le troisième côté AC inconnu; & cette somme est connue.

Donc, si du point B on abaisse la perpendiculaire BD sur le côté AM , cette perpendiculaire coupera en deux parties égales l'angle ABM , c'est-à-dire, qu'elle divisera en deux parties égales la somme des deux angles BAC , BCA ; ainsi l'angle DBM est la moitié de la somme de ces angles: leur somme étant connue, leur moitié DBM est aussi connue.

Non seulement la perpendiculaire BD divise en deux parties égales la somme ABM des deux angles BAC , BCB : elle divise encore en deux parties égales la ligne MA (*n°. 79.*), en sorte que $MD = DA$; donc en coupant CM en deux parties égales au point O , & tirant la ligne DO ,

cette ligne sera nécessairement parallèle au côté inconnu AC , puisque l'on a cette proportion : $MD : DA :: MO : OC$. Ce qui fait voir que les deux côtés du triangle AMC sont coupés proportionnellement, & par conséquent (n°. 279.) que la ligne DO est parallèle à la ligne AC . On doit encore remarquer que MO est une ligne connue : car elle est la moitié de la somme CM des deux côtés connus AB, BC .

Mais si l'on se souvient que la plus grande de deux quantités est égale à la moitié de leur somme, plus leur demi-différence (n°. 103. *Alg.*), on verra, en supposant $BC > BA$, que BO est la demi-différence de ces deux côtés ; puisque ajoutant BO à la moitié de la somme OC , on a le plus grand côté BC . Or (supp.) les deux côtés BC, BA sont connus : ainsi leur différence est donnée : & par conséquent l'on connoît BO , qui est la moitié de cette différence.

Considérons présentement le triangle rectangle MBD . Prenons l'un de ces côtés BD pour sinus total ; l'autre côté MD est la tangente de l'angle DBM opposé à ce côté (n°. 469.), comme il est très-évident, en décrivant du point B , avec le rayon BD , l'arc du cercle DT . Mais nous avons vu ci-dessus que DBM étoit la moitié de la somme des angles BAC, BCA ; le côté MD est donc la tangente de la demi-somme des angles formés sur le troisième côté AC : cette demi-somme est donnée (par la supp.) ; ainsi la valeur de sa tangente MD est connue par les tables des sinus.

Remarquons aussi que dans le triangle MOD nous connoissons, 1°. MO , moitié de la somme des deux côtés connus AB, BC . 2°. BO , moitié de la différence de ces mêmes côtés. 3°. MD , tangente de la demi-somme des angles $BAC,$

BCA , formés sur le troisième côté AC . Par conséquent en mettant ces trois termes dans une proportion, nous leur trouverons un quatrième proportionnel X ; ainsi il faut construire cette proportion : $MO . BO :: MD . X$.

Or il est clair qu'en tirant BS parallèle à OD , la partie SD sera le quatrième proportionnel cherché (n°. 280.) ; & ce terme sera connu, puisque l'on connoît les trois premiers.

Voyons ce que c'est que la ligne SD . BS étant, par la construction, parallèle à OD qui est elle-même parallèle au côté AC , il s'ensuit que BS est parallèle à la ligne AC , & qu'ainsi l'angle $MBS =$ l'angle BCA , le plus petit des deux angles inconnus. Mais $MBS = MBD - DBS$, c'est-à-dire, que MBS , le plus petit des deux angles inconnus, est égal à la moitié MBD de la somme de ces angles, moins l'angle DBS ; l'angle DBS est donc la demi-différence des angles BCA , BAC , puisque la plus petite de deux quantités est égale à la moitié de leur somme, moins leur demi-différence (n°. 103. Alg.) ; par conséquent la ligne SD , tangente de l'angle DBS , est aussi la tangente de la demi-différence des deux angles inconnus BCA , BAC .

Reprenons la proportion $MO . BO :: MD . SD$ trouvée ci-dessus ; si nous l'énonçons, on verra que la moitié MO des deux côtés donnés AB , BC , est à BO , moitié de leur différence, comme MD , tangente de la demi-somme connue des deux angles inconnus, est à SD , tangente de la demi-différence de ces mêmes angles. Or les deux premiers termes de cette proportion sont donnés (supp.), le troisième l'est par les tables ; donc le quatrième est déterminé ; c'est-à-dire, que cette proportion fait connoître la demi-différence des deux angles in-

connus

connus BCA , BAC : il n'y a plus qu'à ajouter cette demi-différence à la moitié de la somme de ces angles, pour avoir BAC le plus grand des deux angles ; ou retrancher cette même demi-différence de la moitié de la somme de ces mêmes angles ; on aura le plus petit angle BCA (a).

(a) Cette découverte est d'une spéculation beaucoup plus fine que celle du *quarré de l'hypothénuse*, &c. pour laquelle on fit aux Muses un sacrifice de cent bœufs. Je voudrois connoître l'Auteur de cette belle proposition, je lui en ferois honneur très volontiers.

Ceux qui étudient les arts, & qui suivent le progrès des sciences, rencontrent assez souvent de très belles inventions, dont les Auteurs sont absolument inconnus. On ne sait à qui attribuer les machines les plus utiles à la Société, la charrue & le moulin. Pourroit-on nommer l'Auteur du compas de proportion, instrument néanmoins qui est tout-à-fait scientifique ? On doit au hasard la découverte du *Télescope* & du *Quinquina*. En un mot, il semble que les génies les plus célèbres n'aient produit que des curiosités, & que l'on soit uniquement redevable des commodités les plus essentielles à des hommes grossiers, obscurs, sans lettres, sans théorie.

Quand on considère ces effets, on est assez porté à croire que les hautes sciences & les sublimes spéculations sont d'une très petite importance. Mais on doit faire réflexion que dès les premiers tems de la formation des Sociétés, on se mit à penser aux machines de première nécessité. Les besoins naturels y sollicitoient tous les hommes. Dans cet état on mit à profit tout ce que la nature peut présenter de modèles. Il est fort ordinaire de voir un courant d'eau faire tourner les corps soumis à son action. Combien de tourbillons occasionnés par l'impulsion du vent ? Il ne s'agit plus alors que de copier la nature : on disposa donc quelques bâtons sur un effieu ; on présenta cet assemblage à l'action de l'eau ou du vent ; & voilà la première origine du moulin.

Ce mouvement autour d'un effieu ne parut d'abord sans doute qu'un léger amusement. La nécessité est industrieuse, elle porte naturellement l'esprit à la réflexion. Une roue qui tourne en peut faire tourner une autre, de nouvelles roues s'engrènent, & la machine satisfait déjà aux besoins les plus pressans.

La première, qui parut en ce genre, dut être aussi grossière que les besoins qui la firent naître. Mais l'expérience en ayant fait connoître les commodités, des besoins plus délicats se firent sentir, le goût s'affina. Il ne suffit pas à la nature de ne point éprouver de mal, elle cherche à être bien ; quand elle y est parvenue, elle veut être mieux : ainsi les hommes, qui succédèrent aux premiers Inventeurs, moins occupés à se défendre contre les premiers besoins, & délivrés en partie du travail de l'invention, en devinrent plus propres à améliorer ce qu'ils possédoient. On vit donc les machines se perfectionner à mesure que nos goûts se développoient ; & si l'Inventeur de la charrue & du moulin est inconnu, c'est que tant d'hommes ont concouru à les amener au degré de perfection où elles sont, que l'on doit leur attribuer ce que l'on dit des Sciences, qu'elles sont

Alors les trois angles du triangle ABC seront connus, aussi bien que les deux côtés AB , BC : c'en est plus qu'il n'en faut pour déterminer le troisième côté AC : car si l'on fait (par Prob. 1. *Trig.*) cette proportion : $S B A C . S A B C :: B C . A C$, où les trois premiers termes sont donnés, il est clair que l'on connoîtra le quatrième terme AC , & qu'ainsi il ne reste plus rien à découvrir dans la question proposée ; C. Q. F. T. & D.

Il nous seroit aisé maintenant de résoudre tous les Problèmes qui ont rapport aux distances accessibles

l'ouvrage des hommes, & non pas celui d'un homme. Si nous considérons encore combien tous les hommes sont naturellement portés à essayer ce qui peut satisfaire à leurs premiers besoins, il me semble que, pour trouver les premières machines, il n'a fallu d'autre génie que le besoin même : que plusieurs hommes de contrées différentes ont dû les découvrir, sans s'être rien communiqué ; les mêmes besoins ayant fait recourir aux mêmes ressources.

Quant aux machines savantes, telles que le compas de proportion & la montre, c'étoit encore si peu de chose dans leur origine, leurs effets étoient si bornés, que l'on fit peu d'attention à leurs premiers Inventeurs. On les oublia même totalement, quand par la suite des tems ces machines acquirent quelque précision, & s'étendirent à un si grand nombre d'usages, qu'elles parurent absolument différentes d'elles-mêmes. Mais Galilée, Descartes, Huygens, Newton sont des Auteurs fort connus ; parce que chacun de ces hommes extraordinaires a fait des découvertes que l'on ne devoit attendre, ce semble, que de plusieurs siècles & de plusieurs nations.

Le Télescope a été découvert par hasard ; c'est qu'il est impossible que les premiers élémens d'un art ou d'une science se découvrent autrement : il faut nécessairement partir de quelque expérience. Ceux qui se conduisent autrement, s'exposent à de longs & inutiles travaux. Le sujet même que je traite, nous en fournit un exemple très remarquable. L'effet des Télescopes vient, comme l'on sçait, de ce que les rayons de lumière passant de l'air dans le verre, & du verre dans l'air, se détournent de leur direction ; c'est ce que l'on appelle *savoir réfraction*. Ceux qui pensent que la philosophie doit absolument remonter aux premières causes, ont travaillé beaucoup à découvrir celle de la réfraction. Ils ne sont pas plus avancés que quand ce Phénomène parut d'abord. Les Mathématiciens laissent disputer les Philosophes, & marchent toujours en avant. La théorie & l'art des Télescopes sont presque portés à leur perfection ; mais on se demande encore comment la réfraction peut s'opérer. Ne seroit-il pas plus philosophique d'avouer que les premiers ressorts de la nature nous seront à jamais inconnus ? Il me semble qu'un ouvrage, qui détermineroit avec soin les limites de l'esprit humain, seroit un excellent Traité de Philosophie.

& inaccessibles, soit que ces distances soient horisontales, verticales, inclinées à l'horison, ou qu'elles désignent des profondeurs ; mais comme tous ces cas particuliers sont renfermés dans les Problèmes dont nous avons donné la solution ci-dessus, nous nous bornerons à quelques uns, afin de ne pas grossir inutilement nos Institutions. Si le Public trouve que cet Ouvrage soit traité selon son goût, & qu'il souhaite d'avoir une énumération exacte de tous ces cas, nous ne manquerons pas de le satisfaire.

PROBLÈME.

472. Trouver d'en-bas la hauteur de l'élévation A C perpendiculaire à l'horison, tels que sont les arbres, les clochers, les pyramides, les édifices qui s'élèvent, comme l'on fait, perpendiculairement à l'horison. Nous supposerons d'abord que cette élévation soit accessible par son pied A (*fig. 165.*)

RÉSOLUTION.

On s'éloignera du pied A jusqu'à une distance B, où l'angle C E D soit entre 30 & 50 degrés, afin que cet angle ne soit pas trop aigu : supposons qu'il ait 36 degrés ; on mesurera la distance $AB = 106$ toises.

Rappelez-vous maintenant que dans un triangle rectangle, si l'on prend l'un des côtés E D pour sinus total, l'autre côté C D est la tangente de l'angle E qui lui est opposé ; l'angle E est connu, ainsi sa tangente est connue : cherchez donc dans les tables des Sinus la tangente de l'angle de 36 degrés $= 7265426$, afin d'avoir cette proportion : Le sinus total 10000000 est à la tangente 7265426 de 36 degrés, comme la distance A B $= 106$ toises, est à l'élévation D C cherchée, dans laquelle les trois premiers termes 10000000,

Cc ij

7265426, 106, étant donnés, on trouvera que le quatrième terme, c'est-à-dire, l'élévation $CD = 77$ toises & quelques pouces. On ajoutera à cette élévation la hauteur du Graphometre $BE = AD$, qui est ordinairement de 4 pieds, & toute l'élévation AC vaudra 77 toises, 4 pieds, quelques pouces.

473. Quand cette élévation AB est totalement inaccessible, ainsi que le représente la figure 166, prenez une station commode au point G : placez-y verticalement le plan du Graphometre, afin de prendre la valeur de l'angle $AOS = 50$ degrés ; ce qui donne l'angle $AOD = 130$ degrés. Eloignez-vous ensuite du point de station O dans l'alignement de la ligne OS , & prenez une base $OD = 40$ toises, de sorte que l'angle ADO ne soit pas trop aigu ; qu'il ait, par exemple, 30 degrés : alors l'angle OAD est aisé à connoître ; on le trouvera de 20 degrés.

Cherchons présentement la longueur du côté OA , en faisant cette proportion : le sinus de l'angle DAO de 20 degrés est au sinus de l'angle ADO de 30 degrés, comme la base $DO = 40$ toises est au côté AO ; ce côté sera donc connu. Présentement le triangle rectangle ASO donne cette proportion : le sinus total est au sinus de l'angle AOS de 50 degrés, comme le côté AO , que l'on vient de connoître, est à l'élévation AS . Ajoutez à cette élévation la hauteur de l'instrument $OG = SB$, & toute la hauteur AB sera connue.

474. Voulez-vous faire usage des Logarithmes ? Reprenons le n°. 472. (*fig.* 165.) où l'on a proposé de trouver la hauteur de l'élévation AC accessible par son pied A . On doit se rappeler que l'angle CED a été supposé de 36 degrés ; & qu'ainsi le triangle rectangle CDE a fourni cette

proportion : le sinus total 10000000 est à la tangente 7265426 de 36 degrés, comme la distance $AB = 106$ toises est à l'élévation CD , que l'on trouve, en achevant le calcul, égale à 77 toises & quelque chose.

Mais pour faire usage des Logarithmes, au lieu des nombres que nous venons d'écrire, prenons les Logarithmes qui leur répondent. Le Logarithme du sinus total, ou de l'angle de 90 degrés, est 10.0000000. Celui de la tangente de 36 degrés est 9.8612610; ces deux Logarithmes se trouvent dans les tables des sinus. Pour le Logarithme de la distance $AB = 106$ toises, on le trouvera dans la table des Logarithmes pour les nombres naturels, qui est à la suite des tables des sinus: ce Logarithme est 2.0253059; & au lieu de multiplier l'un par l'autre les moyens de la proportion, 10000000 . 7265426 :: 106 . CD , & d'en diviser le produit par le premier terme 10000000, on prendra la somme 11.88553059 des Logarithmes de ces mêmes moyens termes, dont on retranchera le Logarithme 10.0000000 du premier terme, & la différence 1.88553059 exprimera le Logarithme du quatrième terme CD (n°. 266.); si l'on cherche ce nombre ou le plus approchant dans la table des Logarithmes pour les nombres naturels, on verra qu'il répond au nombre 77, ainsi qu'on l'a déterminé n°, 472.

Nous avons promis à la fin du n°. 338. pag. 231. (*fig. 112. & 113. PL. XIII.*) d'exposer, dans toutes ses circonstances, la solution Trigonométrique du Problème, où l'on propose de trouver, par une seule station C , les distances de cette station à trois points A , D , B , dont les éloignemens AB , AD , DB , sont connus. C'est

ici qu'il convient de remplir notre engagement.

La station donnée peut être sur un des côtés du triangle ADB , ou au-dedans, ou au-dehors de ce même triangle.

1°. Si l'on se trouve, par exemple, en M , (*fig. 112*) sur l'un des côtés AB , on pourra prendre avec un instrument les angles DMA , DMB ; & les côtés AB , AD , DB étant connus (*supp.*), tous les angles du triangle ADB le seront aussi; (*n°. 465.*) dans le triangle ADM , on connoîtra donc l'angle DAM , conclu des trois côtés donnés; de plus l'angle DMA observé, avec le côté AD donné; ce qui suffit (*n°. 460.*) pour trouver les distances cherchées MD & MA . Et, comme AB est donné, (*supp.*) étant MA de AB , on connoîtra aussi MB ; ainsi les trois distances MA , MD , MB seront toutes connues.

R E M A R Q U E.

On reconnoîtra que l'on est sur l'un des côtés, si la somme des angles DMA , DMB est précisément de 180° . ou, quand ayant observé la direction MA d'un côté, on se trouvera dirigé par l'autre côté sur le point B , sans changer l'Alidade.

2°. Lorsque le point donné se trouvera au dedans du triangle, comme en C , on observera les angles DCA , DCB , ACB , & l'on imaginera qu'une circonférence passe par les trois points A , C , B ; que l'on ait prolongé DC jusqu'à la rencontre de cette circonférence en F , & qu'enfin l'on ait tiré les cordes FA , FB . Cette préparation étant faite, remarquez que l'angle DCA est donné par observation, & par conséquent son supplément ACF ; or $ACF = ABF$; parce que ces deux angles sont à la circonférence du même

cercle, & appuyés sur le même arc AF. Vous remarquerez aisément, par la même raison, que le supplément BCF de l'angle observé DCB est égal à l'angle BAF. Ainsi, dans le triangle ABF, le côté AB, & les deux angles BAF, ABF, sont connus: on pourra donc connoître AF & FB (n°. 460.). Alors les deux côtés AD, AF, & l'angle intercepté DAF du triangle DFA étant connus, on en découvrira (n°. 471.) l'angle ADF; & dans le triangle ADC, on connoîtra l'angle DCA, par observation, l'angle ADF que l'on vient de trouver, & le côté AD donné; d'où l'on conclura (n°. 460.) les deux distances cherchées CA, CD. Et pour avoir la troisième CB, on aura recours au triangle DCB; dans lequel on connoît l'angle DCB observé, l'angle CDB, qui est la différence de l'angle ADB connu à l'angle ADC qu'on vient de découvrir; & enfin le côté DB donné; ce qui fera trouver CB (n°. 460.).

3°. Si le point est donné au-dehors du triangle (fig. 112.), comme en F, on observera les angles AFD, DFB, & l'on imaginera une circonférence par les points A, B, F, ainsi que les cordes FA, FB, AC, CB. On considérera alors le triangle ACB, dans lequel l'angle ABC = AFC angle d'observation; parce qu'ils ont leur sommet à la même circonférence, & qu'ils sont appuyés sur le même arc. Par la même raison, l'angle BAC = l'angle d'observation BFC: on a de plus (supp.) le côté AB connu; d'où l'on conclura (n°. 460.) la longueur des cordes AC CB. Dans le triangle DAC on connoîtra donc les côtés AC, AD, & l'angle intercepté DAC; puisque DAC = DAB connu (supp.), moins l'angle BAC, que l'on vient de découvrir. Ainsi

Cc iv

(n°. 471) on pourra découvrir l'angle ADC ; prenant ensuite le triangle FAD , on remarquera que l'angle AFD d'observation en est connu : l'angle ADF vient d'être découvert, & le côté AD en est donné (supp.) ; donc (n°. 460.) on pourra connoître les deux distances FA , FD ; & passant au triangle FDB , on y connoîtra l'angle d'observation DEB , l'angle FDB qui vaut l'angle connu ADB ; (supp.) moins l'angle ADF que l'on a déjà trouvé ; de plus, le côté DB est donné : on en conclura donc (n°. 460.) la distance FD ; & c'est tout $C. Q. F. D.$

48. Mais le point donné F peut se trouver sur la circonférence du cercle, que l'on imagineroit passer par les trois points A , B , D (*fig. K. Pl. 21.*). Alors la solution du Problème est impossible.

D É M O N S T R A T I O N.

Car 1°. pour qu'elle fût possible, il faudroit que ce qui arrive au point F fût particulier à ce point ; or les angles d'observation formés en F seroient les mêmes en tout autre point de l'arc AFB ; ainsi la solution ne pourroit pas plus lui convenir qu'à tout autre.

2°. Pour résoudre un Problème de cette espèce, il est nécessaire que la seule station permise apporte quelque nouvelle donnée, soit de la part des angles qui s'y forment, soit de la part de leurs côtés. Or on ne peut avoir aucun côté, puisque l'on n'accorde qu'une seule station ; & les angles d'observation AFD , DFB ne font rien connoître de nouveau, car ils sont égaux à des angles donnés ; étant évident que l'angle $AFD =$ l'angle donné DBA , & que l'angle $DFB =$ aussi l'angle donné DAB . Le point F ne fait donc rien trouver de nouveau ; mais avec rien on ne fait rien ; $C. Q. F. D.$

REMARQUE.

On reconnoîtra que la station donnée F est sur la circonférence qui passe par les trois points donnés A, D, B, quand les angles d'observation AFD, DFB se trouveront égaux aux angles DBA, DAB.

DÉMONSTRATION.

Car si, dans cette supposition, le point donné F n'étoit pas à la circonférence qui passe par les points A, B, D, il seroit en quelque point S au dehors (*fig. K. Pl. 21.*) ou en quelque point G au-dedans de cette circonférence: or, en le supposant au dehors en S, il seroit impossible que l'angle d'observation ASD égalât l'angle donné ABD; puisque l'angle B donné a pour mesure la moitié de l'arc AD (n°. 104. *Tom. I.*); mais l'angle ASD n'a pas pour mesure la moitié de ce même arc; car, en tirant la corde AF, on verra que l'angle ABD = AFD (n°. 104. *Tom. I.*): or, AFD > ASD (*Coroll. du n°. 65. Tom. I.*); donc ABD > ASD; l'angle d'observation ASD ne sauroit donc être en même tems égal à l'angle ABD donné, & être au-dehors de la circonférence ADBF.

Pareillement il n'est pas possible que l'angle d'observation AGD, (*fig. L. Pl. 21.*) se trouve au-dedans de la circonférence en G, & qu'il soit en même tems égal à l'angle donné ABD; ce que vous découvrirez aisément, en prolongeant DG jusqu'à la circonférence en R, & en tirant la corde RA. Car l'angle AGD extérieur est plus grand que l'angle ARD: or ARD = ABD; donc AGD > ABD.

410. DE LA TRIGONOMETRIE.

L'angle AFD d'observation ne sauroit donc se trouver égal à l'angle donné ABD , à moins que cet angle AFD ne se trouve sur la circonférence qui passe par les points A, D, B ; & c'est tout $CQFD$.

Les tables des sinus peuvent encore servir à trouver le rapport approché du diamètre d'un cercle à sa circonférence. Nous avons dit que suivant Archimède, ce rapport étoit à peu près comme 7 est à 22; c'est-à-dire qu'en supposant un diamètre de 7 pieds, la circonférence en a presque 22, un peu moins. Mérius prouve que ce rapport est plus approché, si on le prend comme 113 est à 355. Quelques-uns le prennent comme 100 est à 314. Voyons ce que le calcul des sinus nous donnera.

PROBLÈME.

475. Trouver le rapport approché du diamètre d'un cercle à sa circonférence. (*fig. 167.*)

RÉSOLUTION.

Prenons le sinus bd d'une minute de degré; en doublant ce sinus, on aura da corde d'un arc de deux minutes: car le sinus d'un arc est toujours la moitié de la corde du double de cet arc (n°. 445.). Il y a 60 minutes au degré, & par conséquent 30 fois 2 minutes; donc en multipliant par 30 la corde da , on aura la valeur de 30 cordes égales à la corde da , ou 30 da inscrites dans l'arc d'un degré: le cercle contient 360 degrés; par conséquent il faut multiplier 30 da par 360, pour avoir toutes les cordes de deux minutes inscrites au cercle. Or une corde de deux minutes dans les cercles d'une grandeur médiocre se confond presque entièrement avec son arc; ainsi toutes les cordes de deux minutes inscrites au cercle, prises ensemble, ne sont pas

sensiblement différentes de la circonférence du cercle : nous prendrons donc $30 da \times 360$ ou $10800 da$, c'est-à-dire, un polygone de dix mille huit cents côtés, inscrit à un cercle, pour la circonférence de ce cercle.

Supposons maintenant le sinus total ou le rayon de ce cercle $= 100000$; les tables donneront 29 pour le sinus d'une minute, & par conséquent $29 \times 2 = 58$ pour la corde de deux minutes $= da$: ainsi $10800 da = 10800 \times 58 = 626400$ pourra être pris pour la circonférence. D'ailleurs son rayon étant 100000 , le diamètre sera 200000 ; par conséquent le diamètre de ce cercle est à sa circonférence comme 200000 est à 626400 ; & en divisant l'un & l'autre terme de ce rapport par 800, on trouve que le diamètre est à la circonférence, comme 250 est à 783 : c'est donc à dire qu'en supposant le diamètre d'un cercle égal à 250 pouces, la circonférence en contiendra à peu près 783.

Ainsi quand on voudra trouver par ce rapport le diamètre d'un cercle, dont la circonférence $= 10$ pieds, on fera cette règle de trois : $783 : 250 :: 10 : x$, diamètre cherché ; on trouvera ce diamètre égal à trois pieds $+$ $\frac{151}{783}$ $= 3$ pieds 2 pouces, 3 lignes, $\frac{603}{783}$ de ligne.

Jusqu'à présent nous n'avons déterminé que des objets accessibles ou inaccessibles ; terminés par des lignes droites. On peut avoir besoin, & il est au moins fort curieux de pouvoir connoître les distances & les aires de ceux dont les dimensions sont circulaires. Un Magasin, une Tour, un grand Bassin inaccessibles, offrent assez souvent ces figures ; & lorsqu'on en peut approcher, le centre en est ordinairement si caché ou si embarrassé qu'on ne peut y appliquer aucune mesure. La résolution

des Problèmes suivans va lever toutes ces difficultés.

PROBLÈME.

Trouver la surface de la base d'une Tour circulaire inaccessible.

RÉSOLUTION.

D'un point B (*fig. T. PL. 6.*) d'où vous puissiez observer la Tour avec un Graphometre muni de bonnes lunettes, remarquez sur cet objet un point M, dans la direction de la tangente BS; c'est-à-dire, faites qu'un rayon visuel, en rasant ou en effleurant la Tour, aille rencontrer au-delà quelque autre objet remarquable: vous ferez sûr que ce rayon visuel est une vraie tangente. Retenez-en bien le point M de contingence. Appuyez ensuite cette tangente BM à une base BL que vous mesurerez, & prenez bien exactement en degrés les valeurs des angles LBM, BLM, formés sur la base BL par les rayons visuels BM, LM, dirigés au point M de contingence, afin d'en conclure l'angle BML. Si vous faites ensuite cette proportion, le sinus de l'angle BML connu est au sinus de l'angle BLM, aussi connu, comme la base BL, dont on fait la mesure, est à la tangente BM; il est clair que la longueur de cette tangente vous sera connue.

Imaginez présentement le rayon MD & la ligne BD; cela formera avec la tangente BM, un triangle BMD rectangle en M, dans lequel il est aisé de connoître en degrés la valeur de l'angle DBM.

Car, quoique l'on ne puisse se servir ici de la ligne BD, dont on ignore la direction, on peut

se donner, comme ci-dessus, un autre rayon visuel BG, tangent à la Tour au point R du cercle, qui en est une coupe, & par conséquent connoître les degrés de l'angle MBR des deux tangentes : or, en imaginant le rayon DR, il est clair, à cause des deux tangentes égales BM, BR, que l'angle MBR est coupé en deux parties égales par la ligne BD; & cet angle étant connu par le moyen de l'instrument, la moitié MBD le sera aussi : de plus, l'angle BMD est droit par la nature de la tangente; ainsi dans le triangle rectangle BDM, on connoît deux angles & le côté BM; on connoîtra donc le rayon DM, en faisant cette proportion : le sinus total est à la tangente de l'angle DBM, comme BM est à DM, dans laquelle les trois premiers termes connus feront connoître le rayon DM, qui donnera le diamètre d'où l'on aura la circonférence, & par conséquent l'aire ou la surface de la base circulaire inaccessible; C. Q. F. D.

Quand la circonférence d'un plan proposé, ou simplement un de ses arcs sera accessible, sans qu'on puisse se placer au centre, il faudra alors moins d'appareil & moins de science géométrique pour en connoître les degrés, ainsi qu'on va le voir.

PROBLÈME.

Trouver les degrés d'un arc accessible CRB, (*fig. K. PL. 3.*) au centre duquel il n'est pas possible de placer un instrument.

RÉSOLUTION.

L'opération ne pourra se faire qu'au dehors de la figure, on en se plaçant entre la circonférence & le centre.

1°. Si l'on veut prendre par dehors les degrés de l'arc CRB , on le coupera d'abord par la moitié en R . Ensuite on cherchera un point, comme S , à égale distance de C & de B , pour avoir la ligne SR perpendiculaire à l'arc CRB ; laquelle prolongée passeroit nécessairement par le centre D de l'arc proposé.

Pareillement, en appliquant une mesure pliante sur l'arc CR , moitié de CB , on en prendra le milieu au point L , & l'on cherchera, comme ci-dessus, un point M à égale distance de C & de R , pour avoir une seconde perpendiculaire ML sur l'arc CB , laquelle prolongée passeroit aussi par le centre D ; & il est clair, par cette construction, que l'angle LDR , ou MDS , ou, ce qui revient au même, que l'arc LR est le quart de l'arc proposé CRB .

Or il n'y a rien de si aisé que de connoître l'angle LDR ; car, après avoir fait $LM = RS$, prises sur des directions que l'on vient de se donner, & planté des piquets aux points R, L, M, S , on placera un instrument au point M ou S , pour connoître les degrés de l'angle $RS M$, ou de son égal $LM S$. On le doublera, & cet arc ainsi doublé, soustrait de 180 degrés, fera connoître l'angle LDR ou son arc LR , lequel quadruplé donnera en degrés la valeur de l'arc proposé CRB . C. Q. F. T.

2°. Lorsque, dans la pratique, on se trouvera forcé d'opérer au-dedans de l'arc ou du cercle proposé, sans pouvoir se placer au centre, ainsi que le Problème le suppose, on coupera, comme ci-dessus, l'arc proposé BC , (*fig. X. PL. III.*) en deux parties égales au point R ; & sa moitié CR aussi en deux parties égales au point L ; après cela, on cherchera un point S également éloigné de B

& de C, & un autre point M, éloigné de C comme de R; ce qui donnera les directions ML, SR, perpendiculaires à l'arc BC, lesquelles prolongées passeroient par le centre D, où elles formeroient le triangle MDS ou LDR, dont il faut trouver l'angle D.

Pour y parvenir, on fera $ML = SR$, & après avoir planté des piquets aux points M, S, L, R, ainsi que quelques autres dans les directions LM, RS, du côté du centre, on placera un Graphometre en M ou en S, pour connoître les degrés de l'angle MSD ou de son égal DMS; & cet angle doublé, soustrait de 180, donnera l'angle D ou son arc LR, lequel quadruplé sera en degrés la valeur de l'arc CRB proposé.

La démonstration en est si palpable, qu'il me paroît absolument superflu de la décrire.

COROLLAIRE.

Les degrés de l'arc BC une fois connus, si l'on veut avoir l'aire du cercle auquel cet arc appartient, on en cherchera la longueur en toises, pieds, pouces, &c. Je suppose cette courbe longue de 17 pieds, & de 48°. en ce cas, puisque 48°. donnent 17 pieds, combien produiront 360°. ? Le quatrième terme de cette proportion fera connoître en pieds la longueur de la circonférence, d'où l'on déduira le diamètre, & par conséquent l'aire du plan proposé.

FIN.

EXTRAIT DES REGISTRES

de l'Académie Royale des Sciences.

Du 15 Janvier 1746.

Messieurs le Monnier & d'Alembert, qui avoient été nommés pour examiner un Ouvrage de M. de la Chapelle, intitulé : *Institutions de Géométrie*, &c. en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet Ouvrage méritoit son approbation, tant par l'ordre & la clarté qui y regnent, que par la méthode nouvelle à plusieurs égards avec laquelle l'Auteur a traité un sujet déjà tant de fois manié. En foi de quoi j'ai signé le présent certificat. A Paris, ce 24 Janvier 1746.

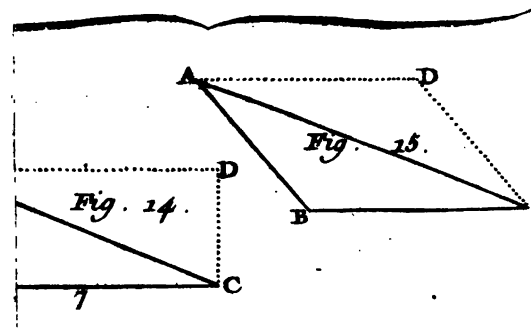
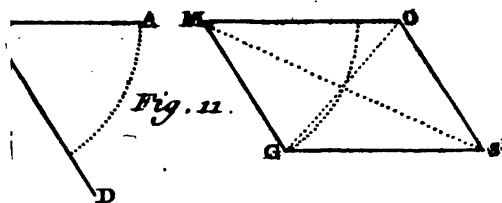
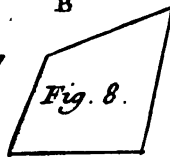
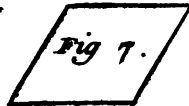
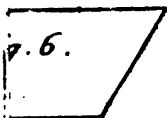
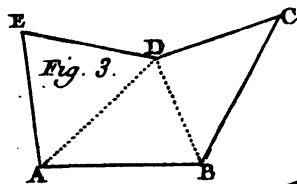
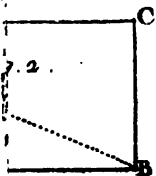
GRANDJEAN DE FOUCHY, Secrétaire perpétuel
de l'Académie Royale des Sciences.

Approbation du Censeur Royal.

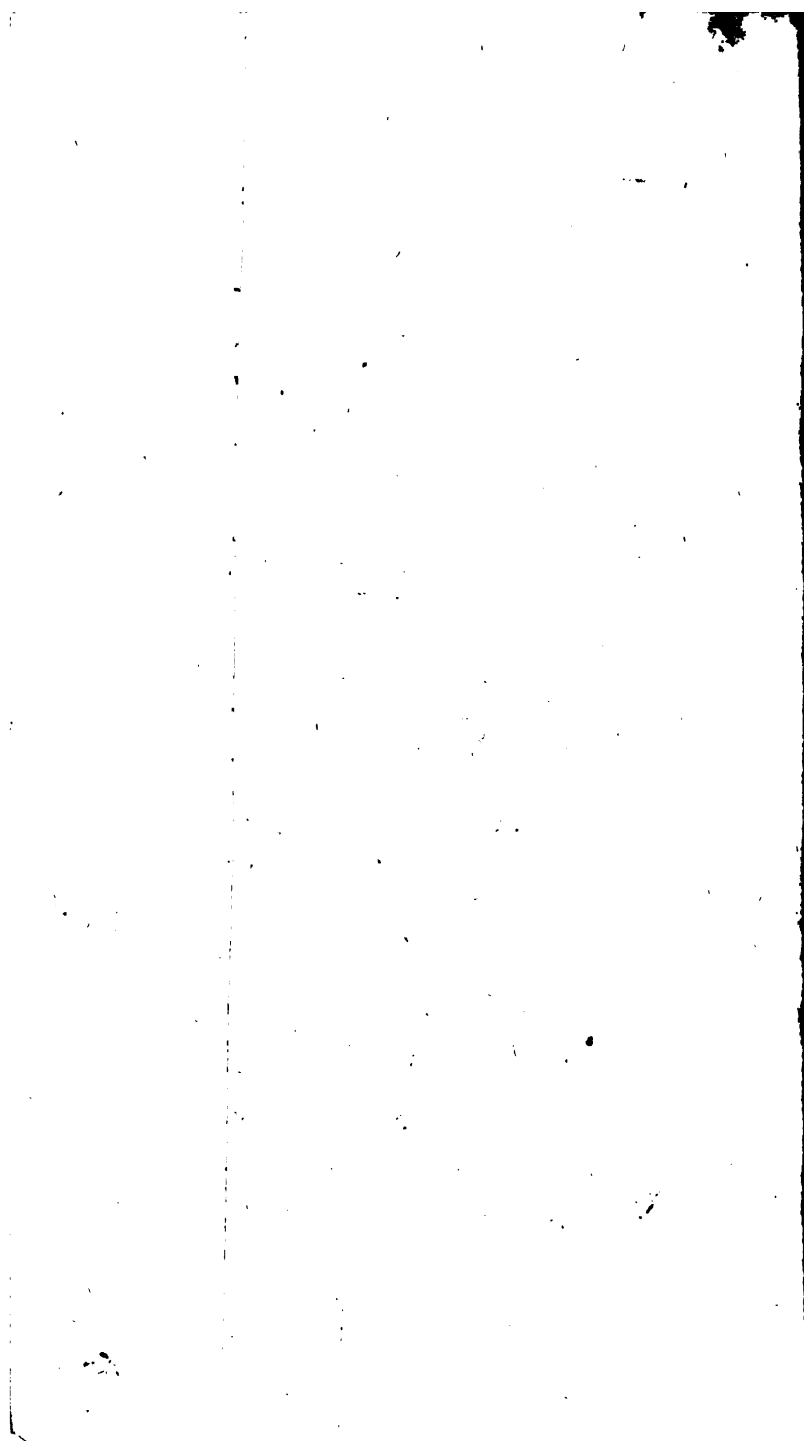
JAi lu, par ordre de Monseigneur le Chancelier, la nouvelle impression des *Institutions de Géométrie*, & les augmentations que l'Auteur a faites ; j'ai cru qu'elles étoient utiles, & ne rendroient l'Ouvrage que plus parfait. A Paris, ce 5 Juiller 1764.

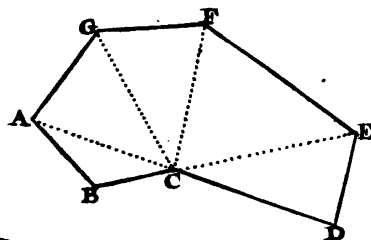
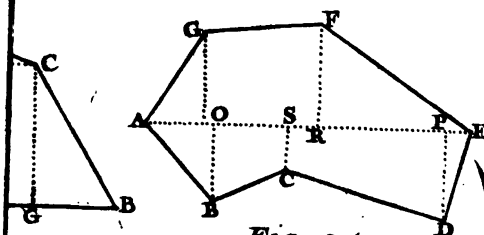
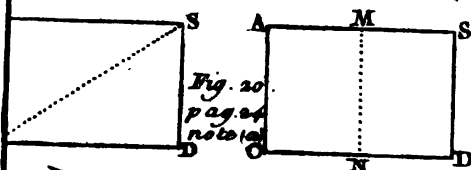
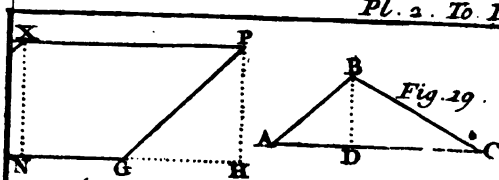
MONTCARVILLE, Lecteur & Professeur Royal.

De l'Imprimerie de la Veuve DELATOUR, 1765.



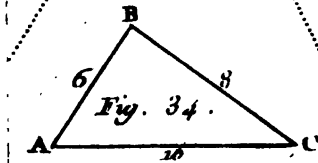
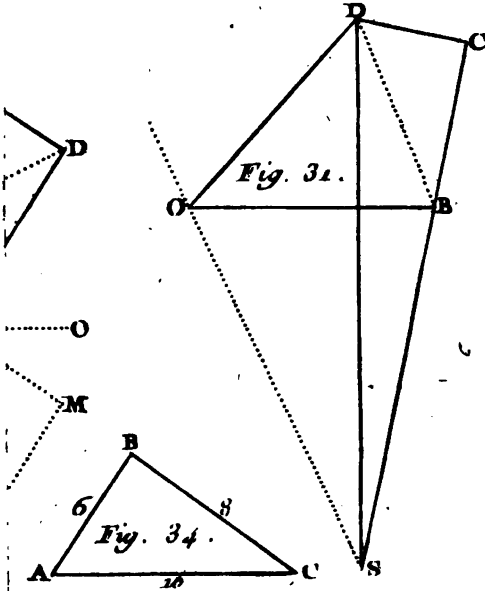
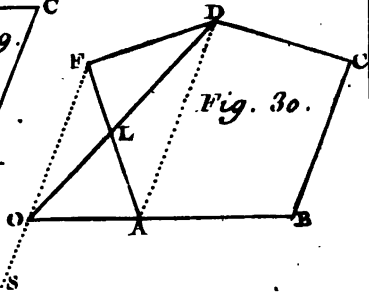
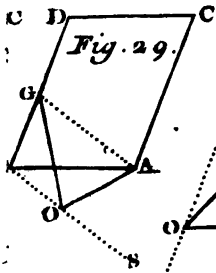
Herissot sculp.



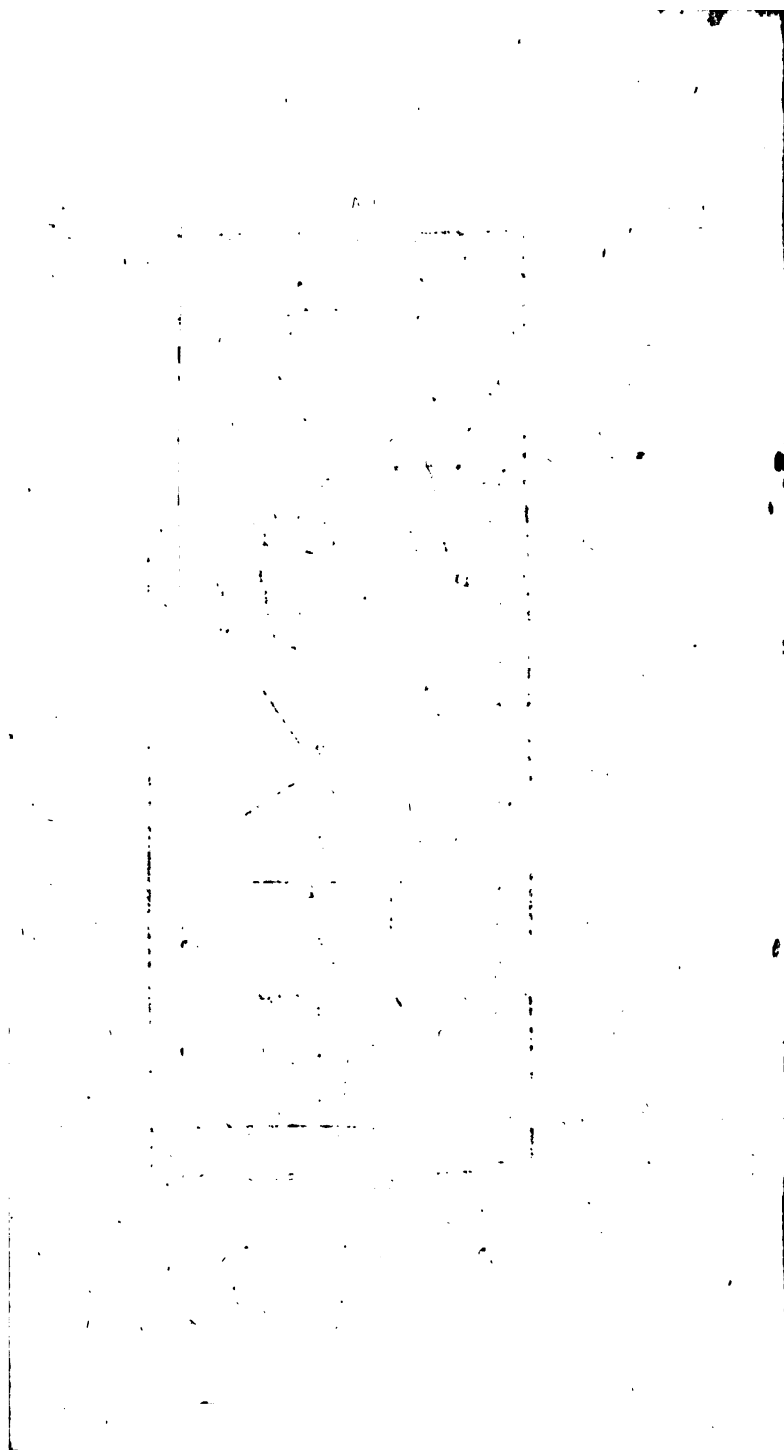


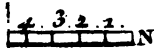
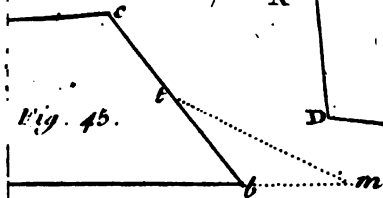
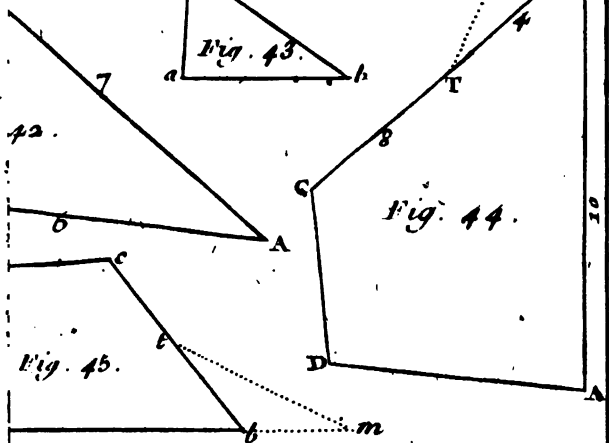
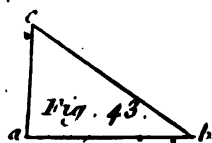
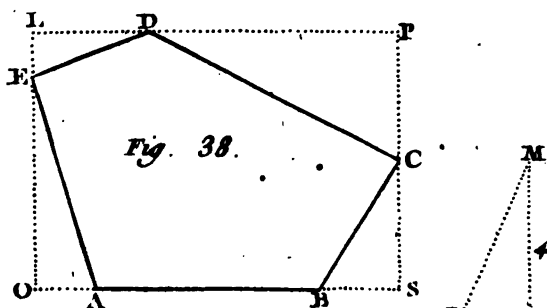
Herrislet Sculp.





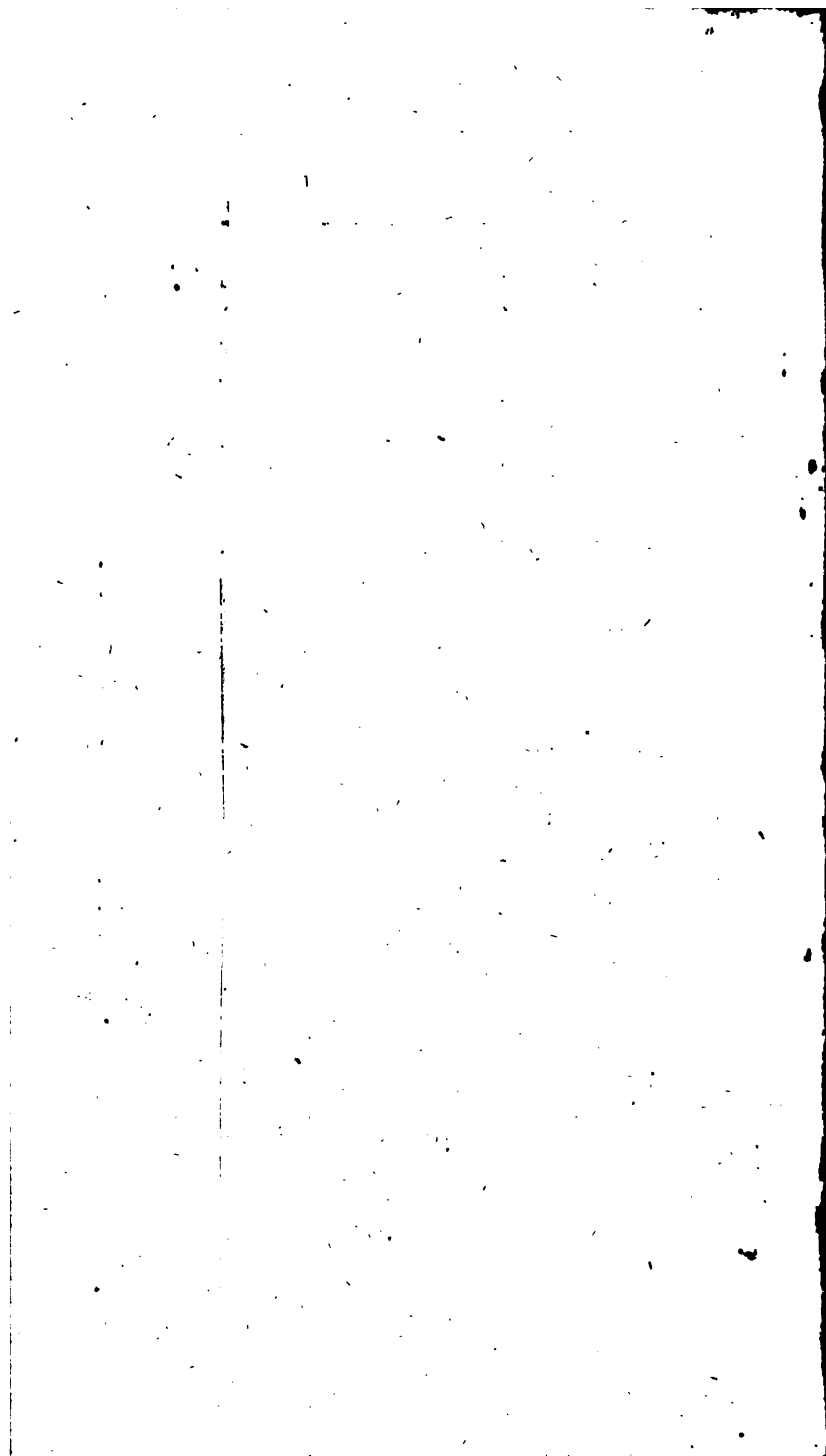
Herisset Sculp.

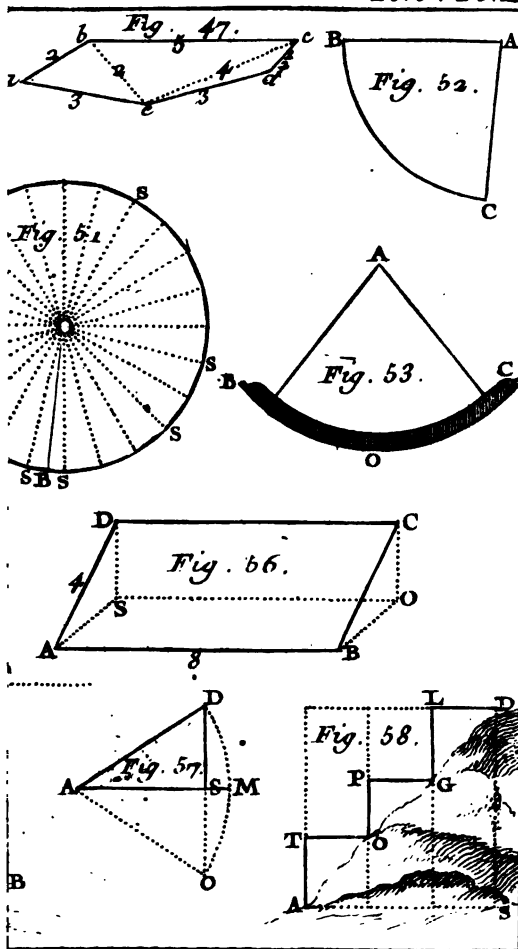




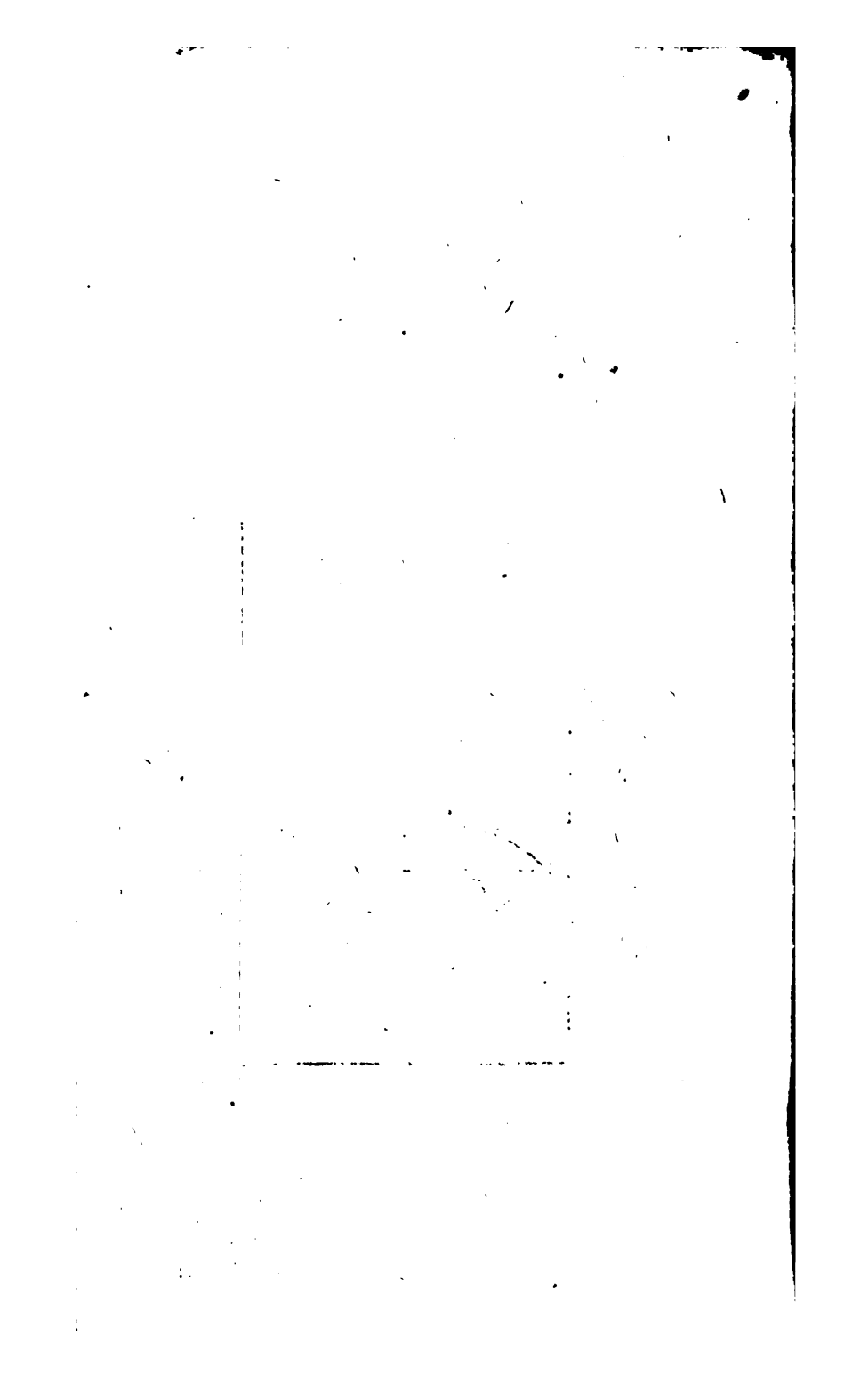
Herissel Souly.

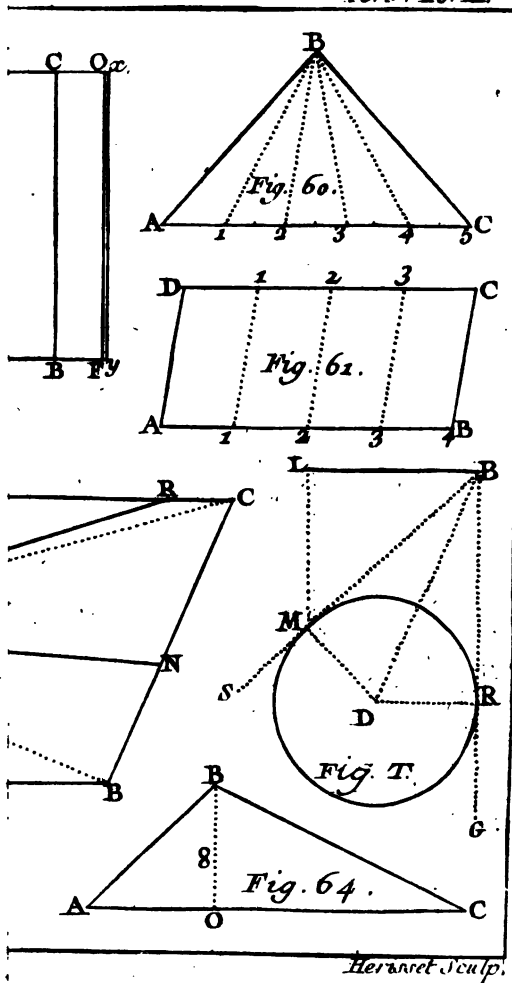


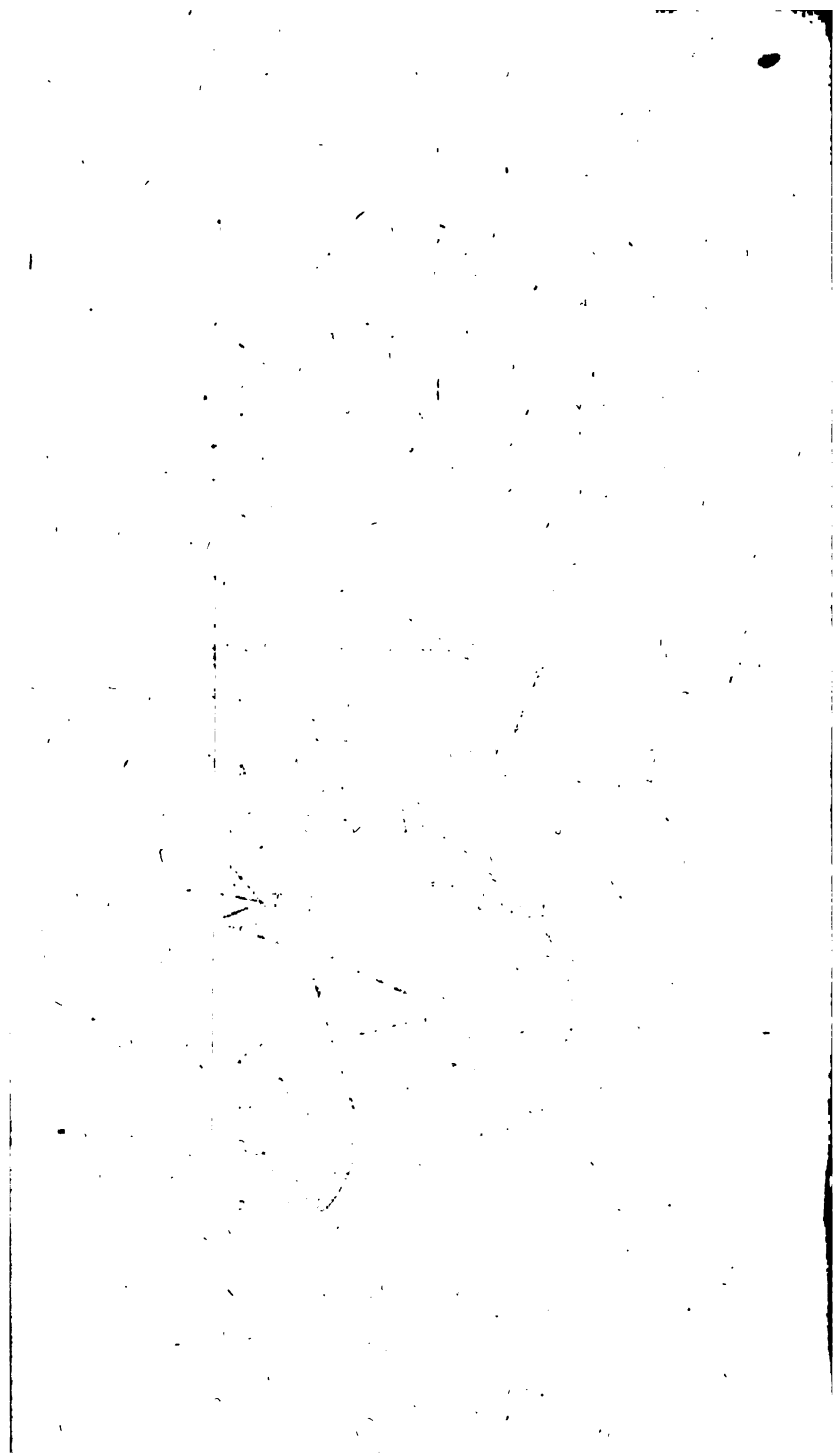


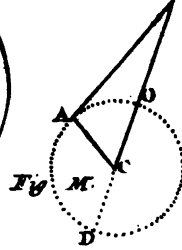
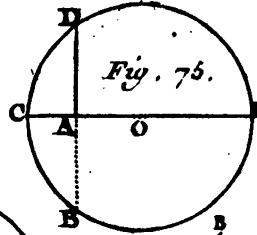
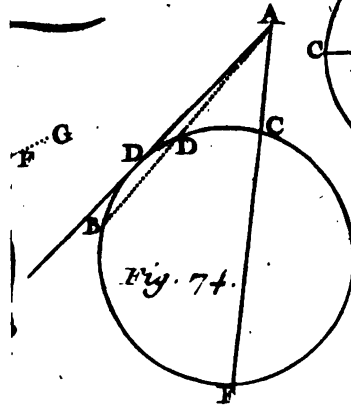
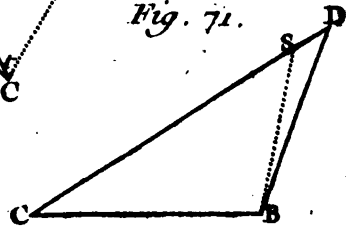
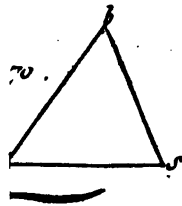
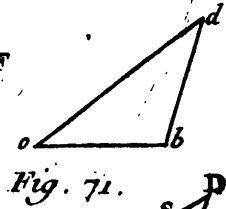
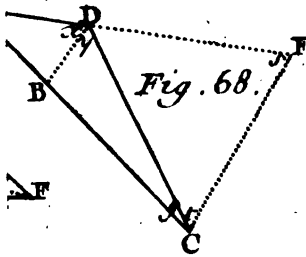


Herisset Sculp.



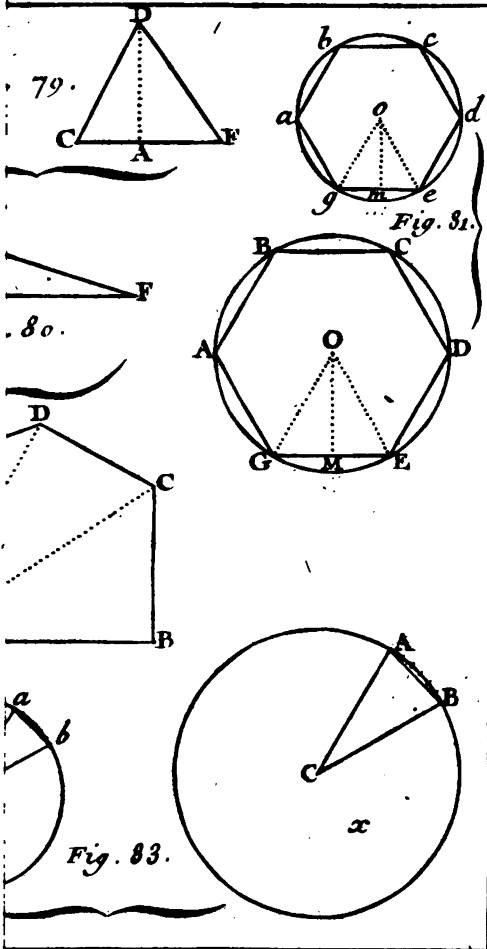




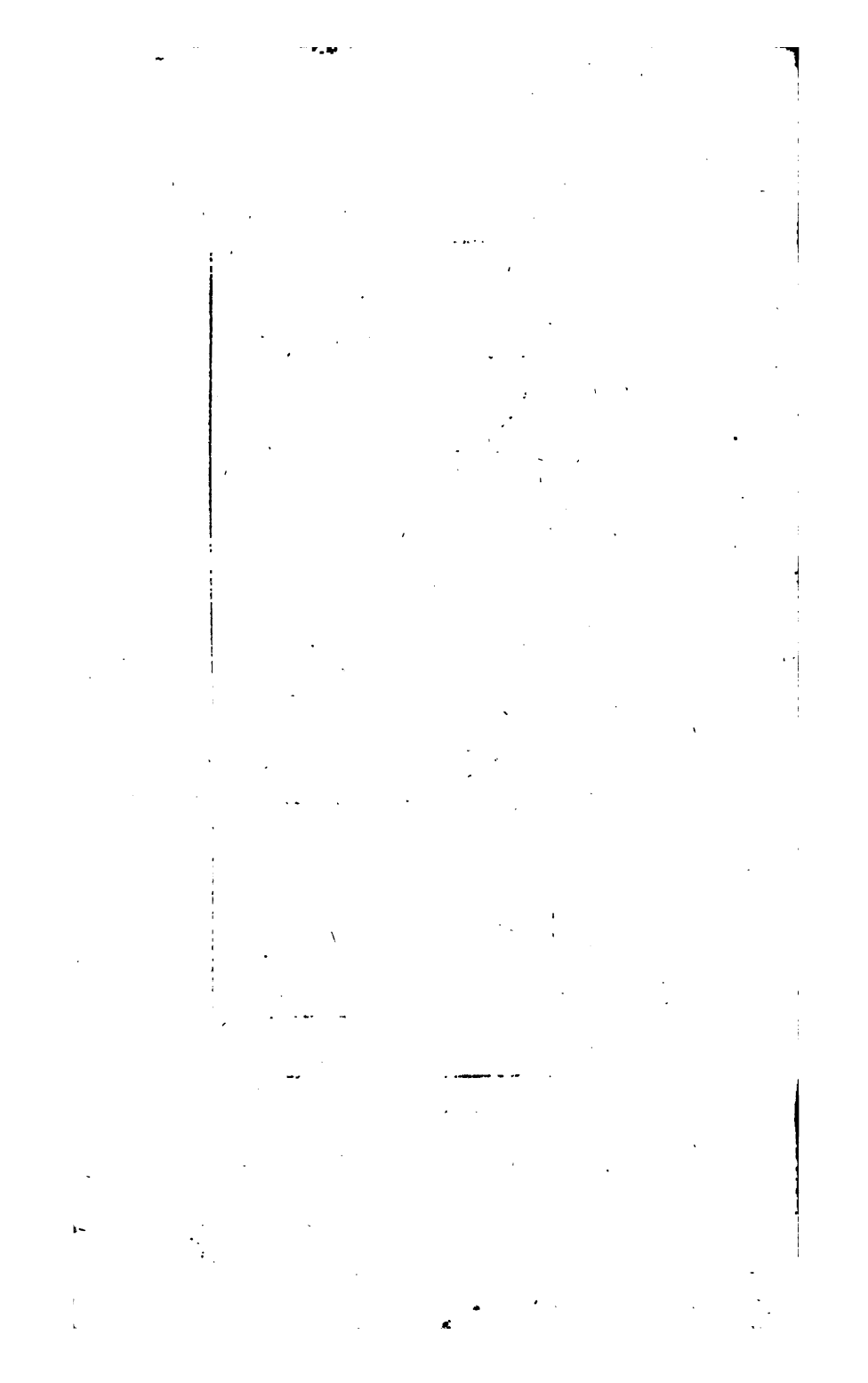


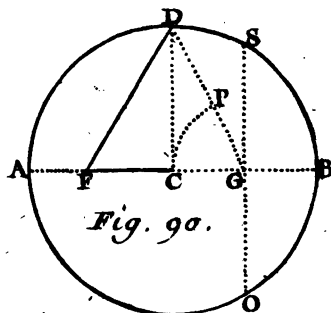
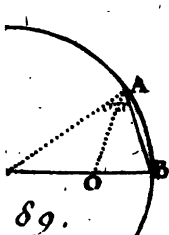
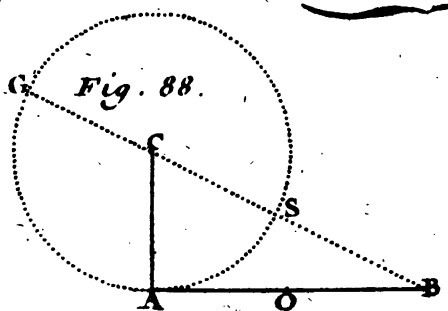
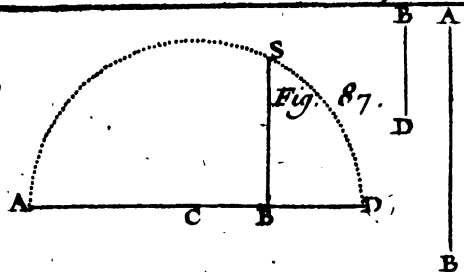
Horrold Sculp.





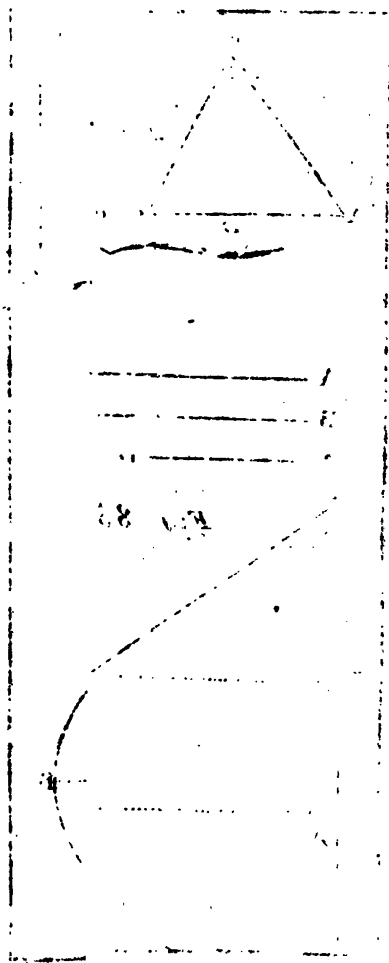
Horwath Sculp.

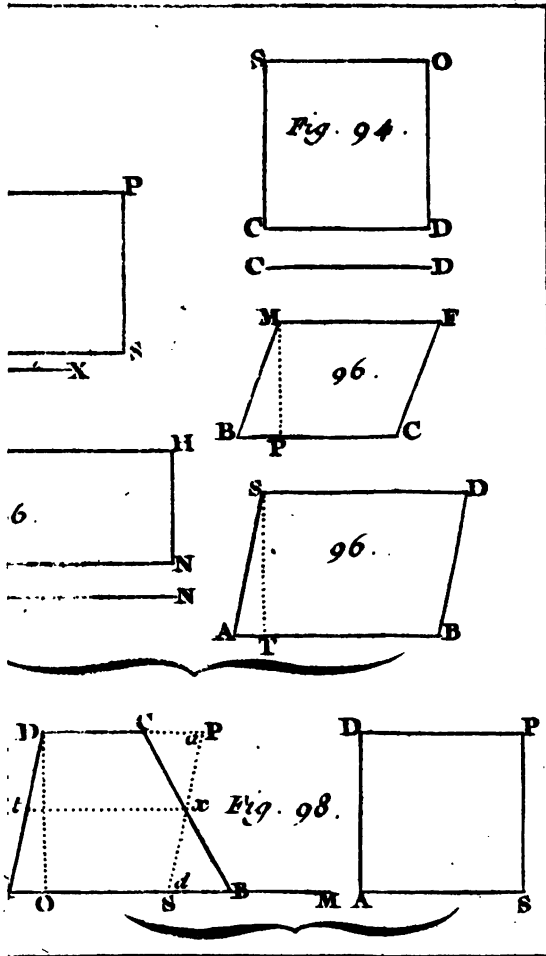




Heriott. Sculp.

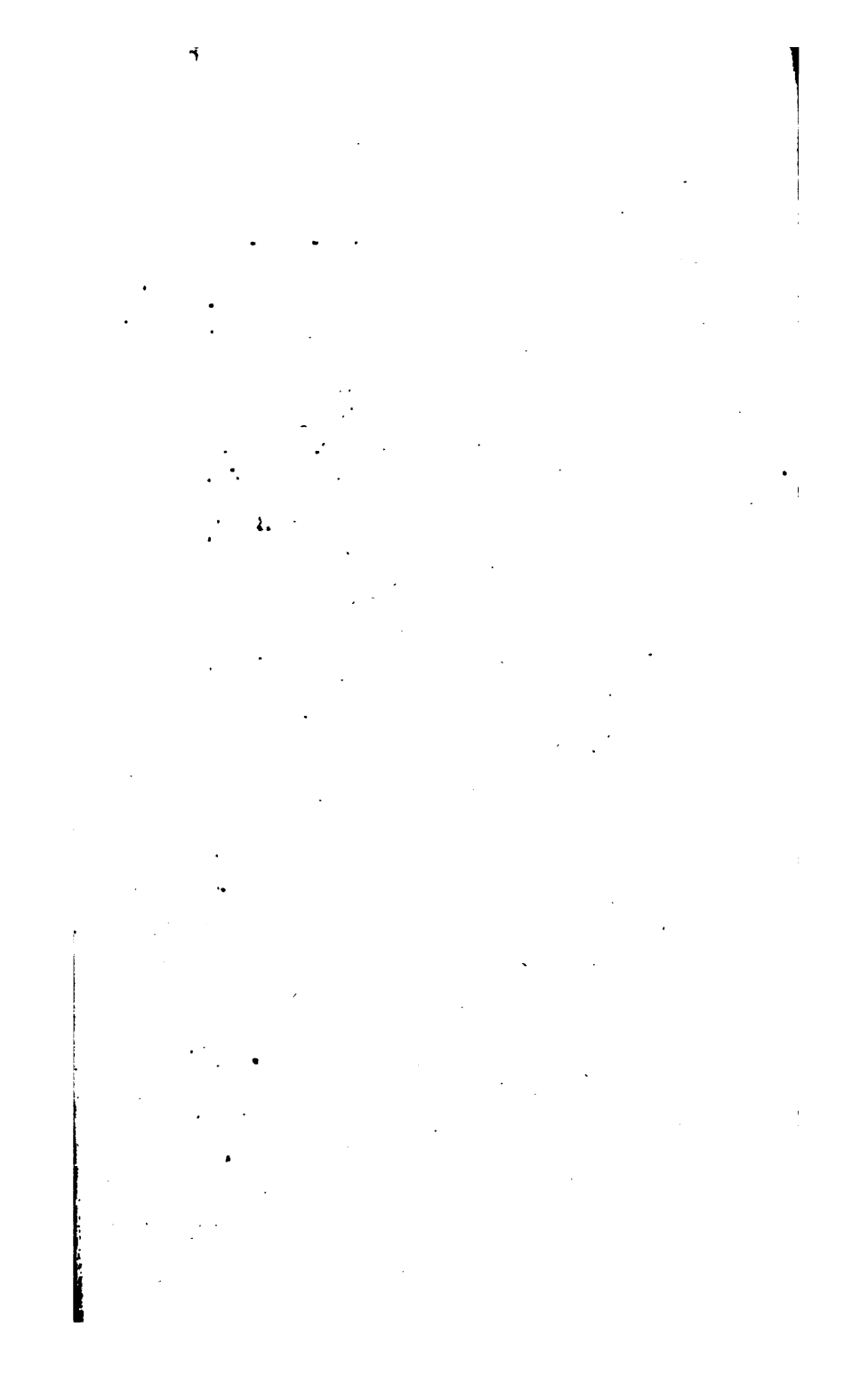


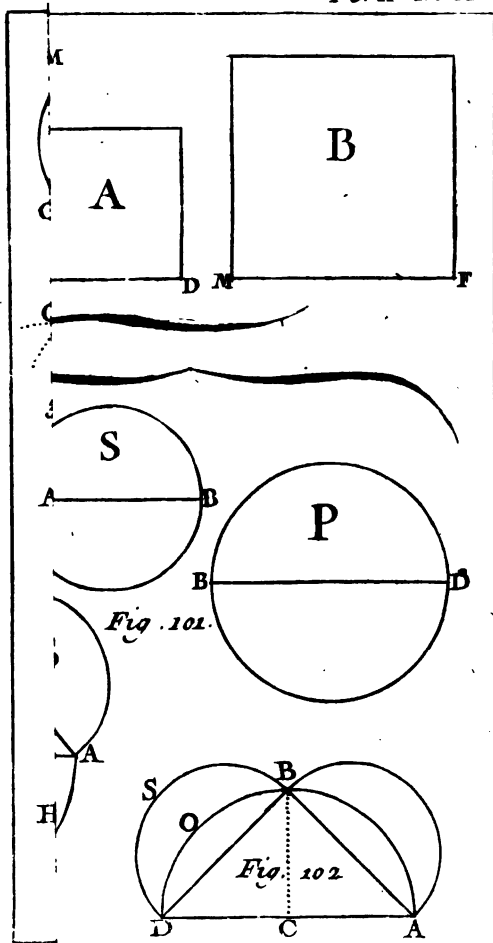




Herissot Sculp.







Heriæset Sculp.



Fig. 106.

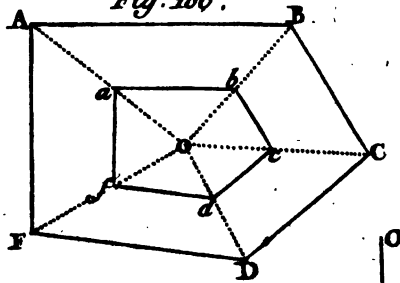


Fig. 108.

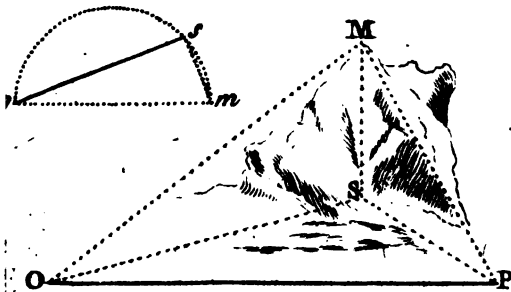
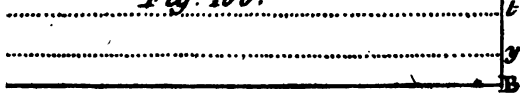
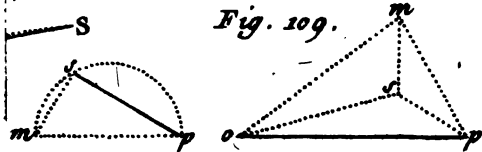
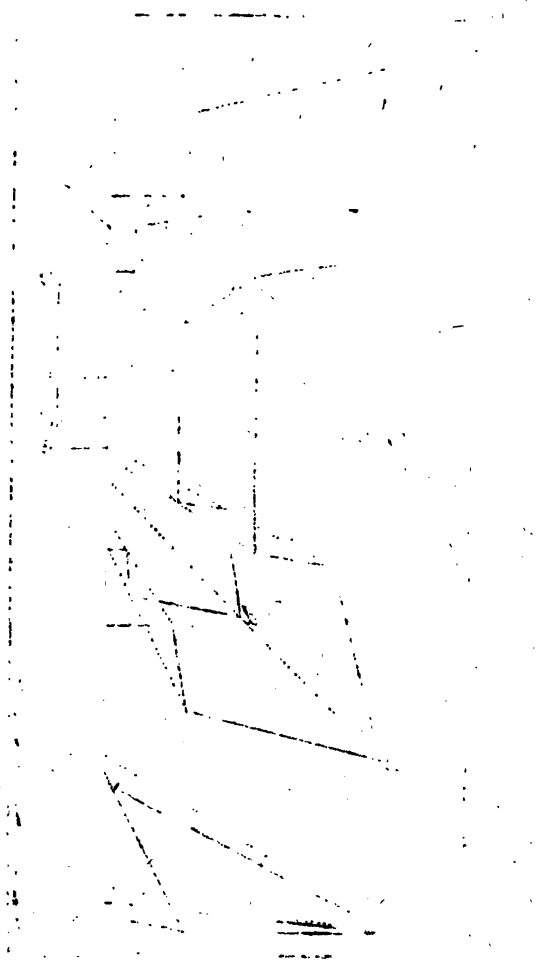


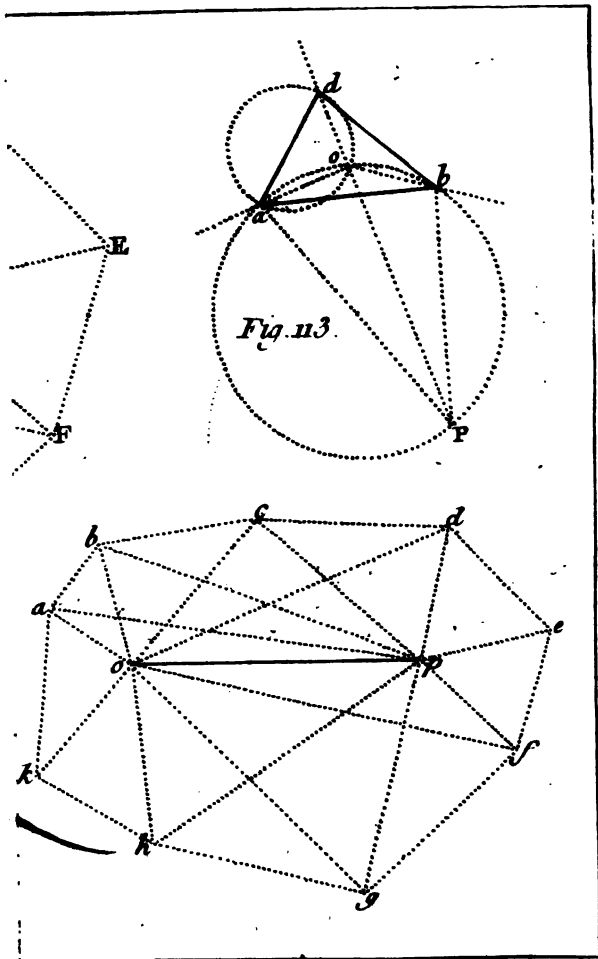
Fig. 109.



Herrissel Sculp.

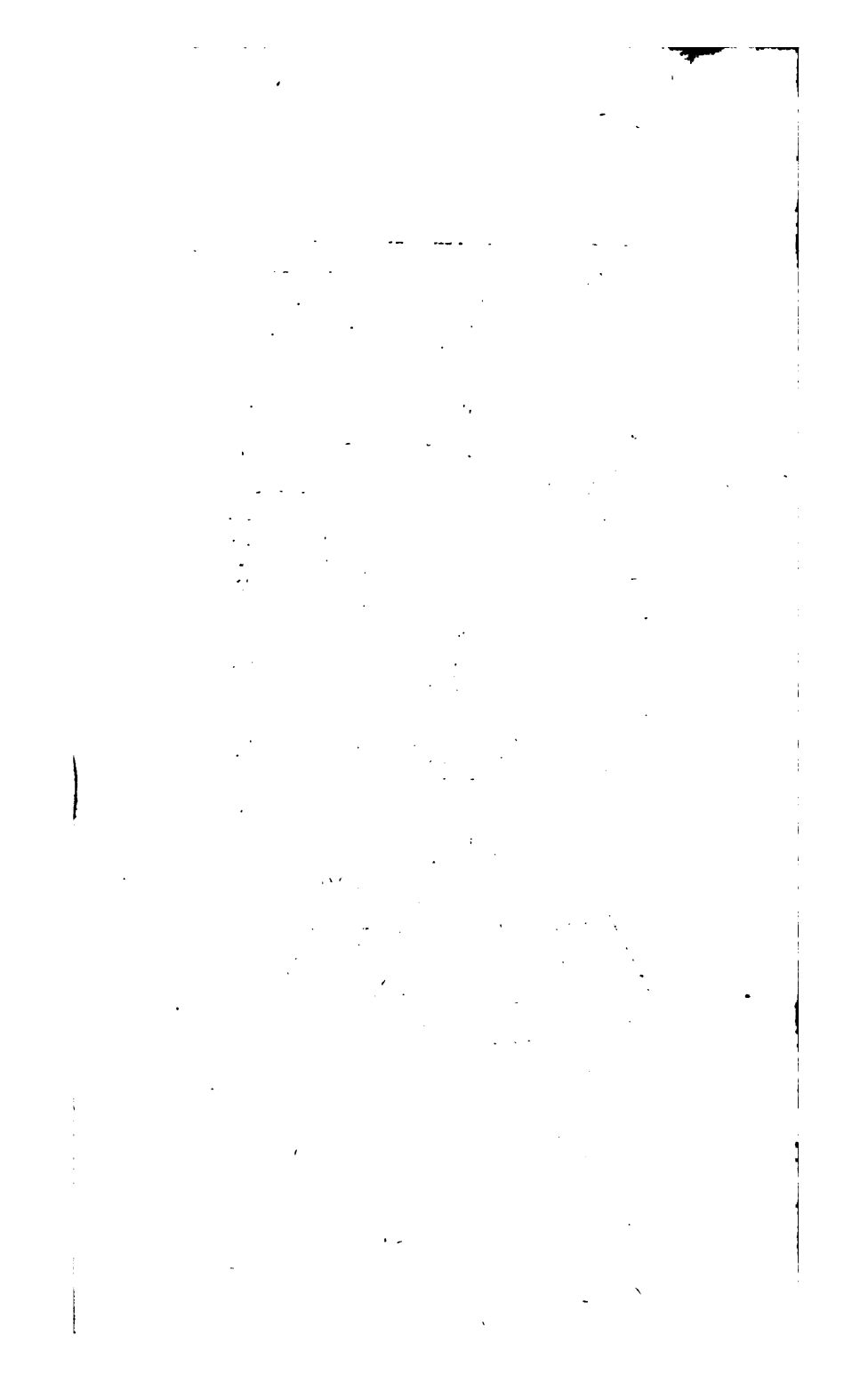


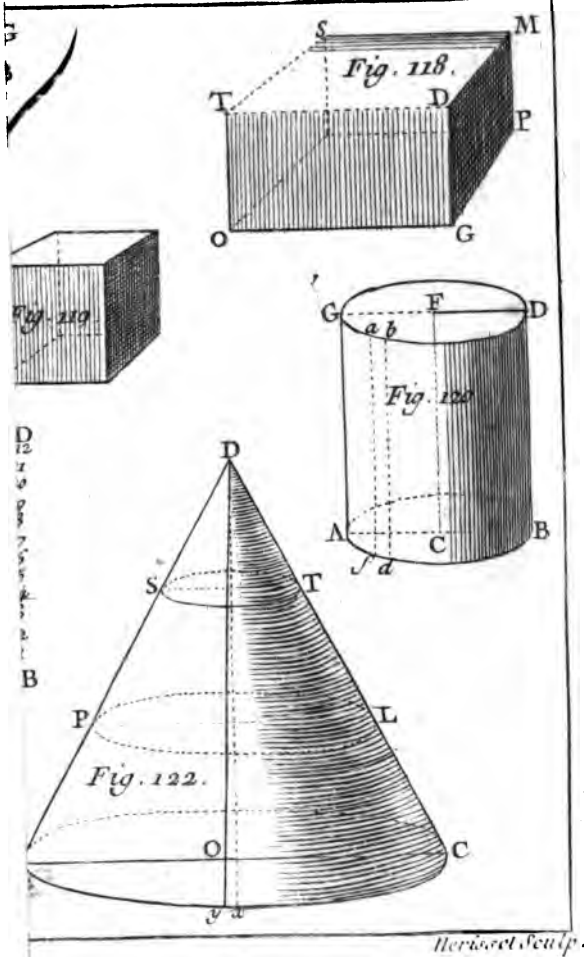


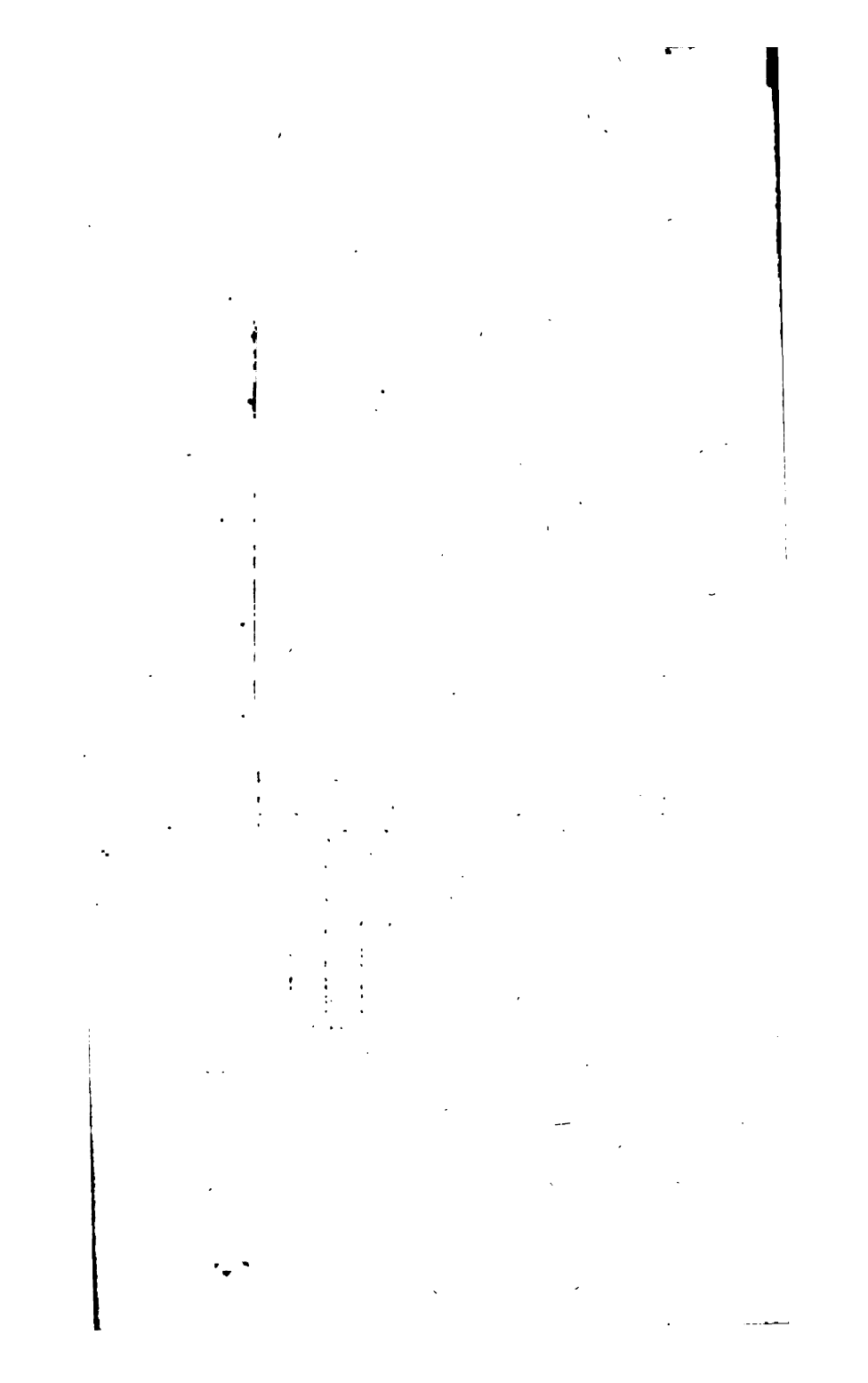


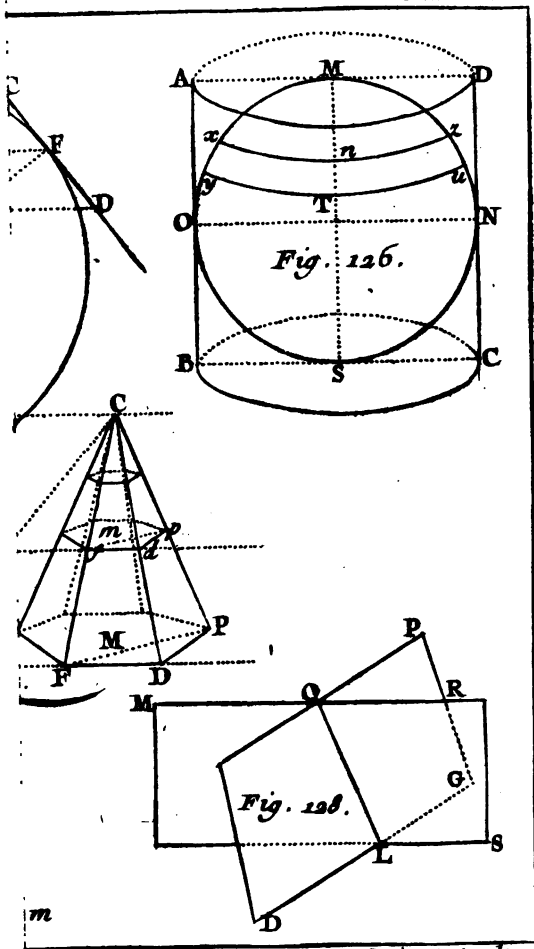
Herissot Sculp.







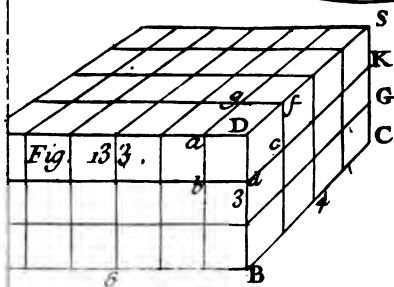
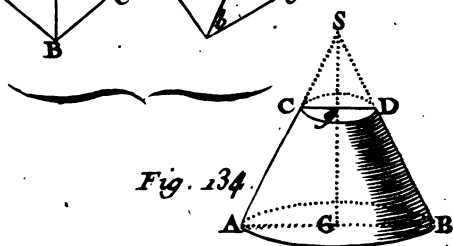
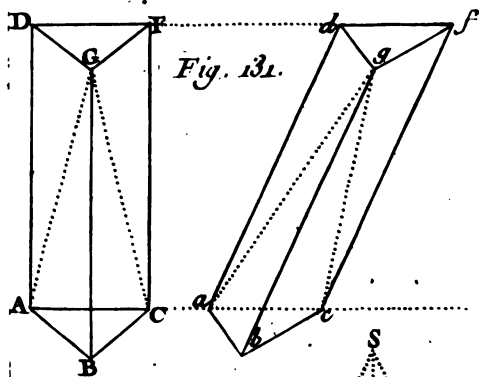




Harnavel Sculp.







Horissel Sculp.



157

1. The first part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 1, 1861. It is a very important document, as it contains the President's message to the Congress at the beginning of his second term. The letter is written in a formal, dignified style, and it is one of the most important documents in the history of the United States. It is a document that has been read and studied by many generations of Americans, and it is a document that has shaped the course of the nation's history. The letter is a masterpiece of American literature, and it is a document that has inspired many Americans to fight for the principles of liberty and justice for all.

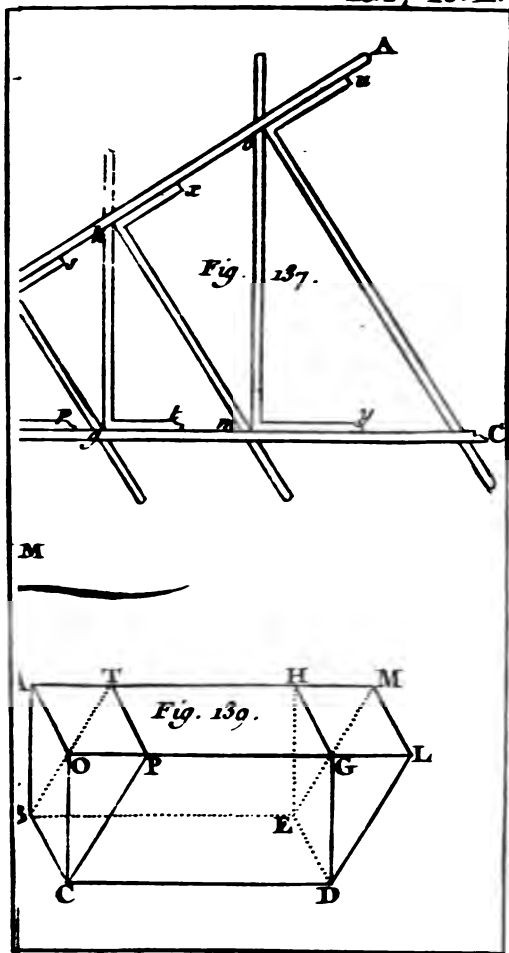
2. The second part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 1, 1861. It is a very important document, as it contains the President's message to the Congress at the beginning of his second term. The letter is written in a formal, dignified style, and it is one of the most important documents in the history of the United States. It is a document that has been read and studied by many generations of Americans, and it is a document that has shaped the course of the nation's history. The letter is a masterpiece of American literature, and it is a document that has inspired many Americans to fight for the principles of liberty and justice for all.

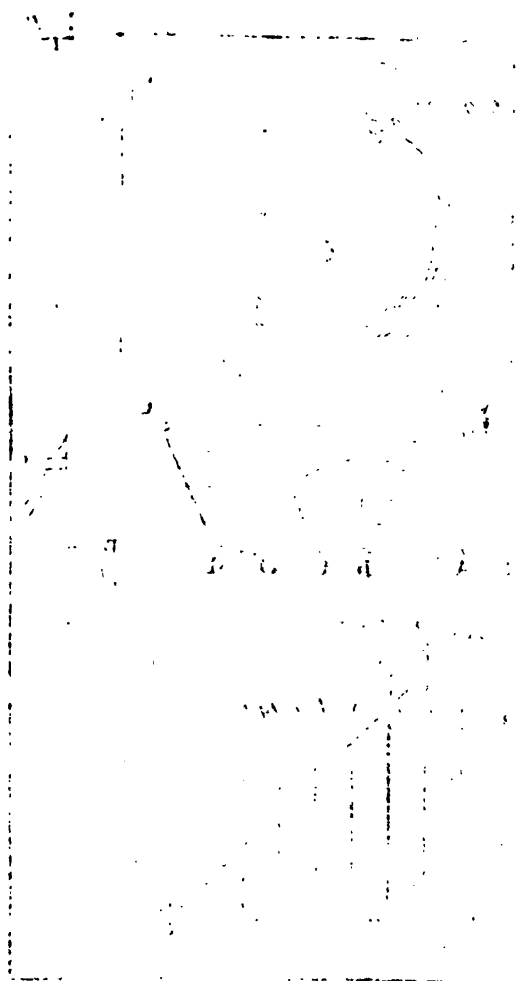
3. The third part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 1, 1861. It is a very important document, as it contains the President's message to the Congress at the beginning of his second term. The letter is written in a formal, dignified style, and it is one of the most important documents in the history of the United States. It is a document that has been read and studied by many generations of Americans, and it is a document that has shaped the course of the nation's history. The letter is a masterpiece of American literature, and it is a document that has inspired many Americans to fight for the principles of liberty and justice for all.

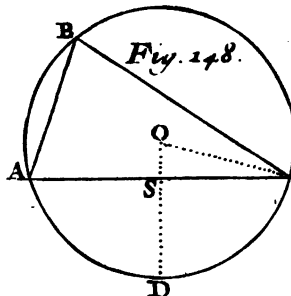
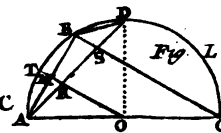
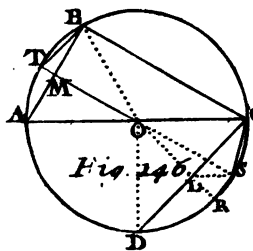
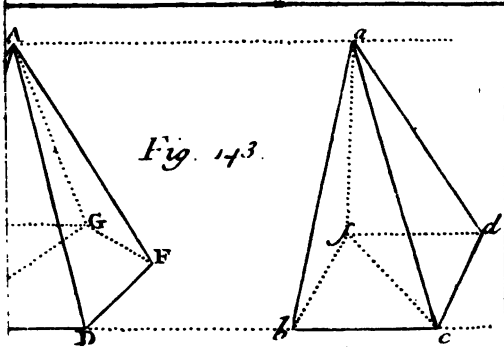
4. The fourth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 1, 1861. It is a very important document, as it contains the President's message to the Congress at the beginning of his second term. The letter is written in a formal, dignified style, and it is one of the most important documents in the history of the United States. It is a document that has been read and studied by many generations of Americans, and it is a document that has shaped the course of the nation's history. The letter is a masterpiece of American literature, and it is a document that has inspired many Americans to fight for the principles of liberty and justice for all.

5. The fifth part of the document is a letter from the President of the United States to the Congress, dated January 1, 1861. It is a very important document, as it contains the President's message to the Congress at the beginning of his second term. The letter is written in a formal, dignified style, and it is one of the most important documents in the history of the United States. It is a document that has been read and studied by many generations of Americans, and it is a document that has shaped the course of the nation's history. The letter is a masterpiece of American literature, and it is a document that has inspired many Americans to fight for the principles of liberty and justice for all.

Н. 17. То. II.

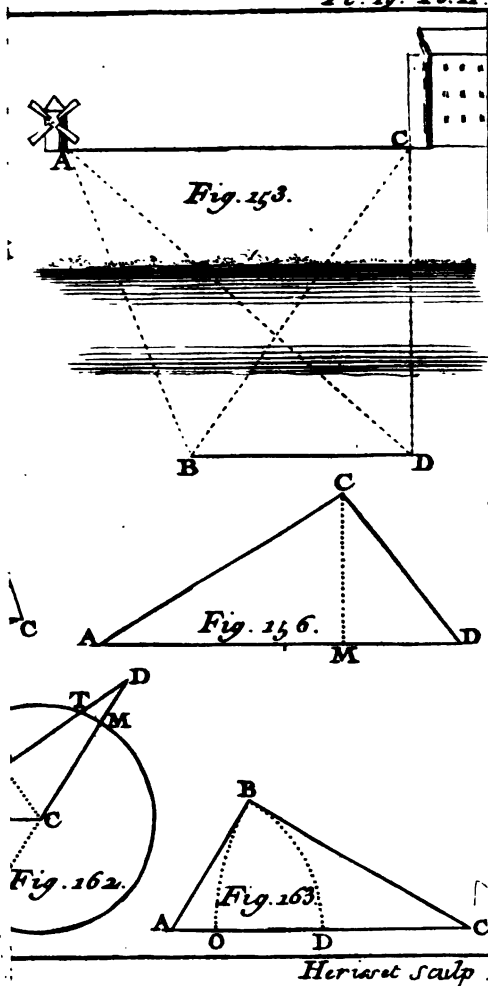


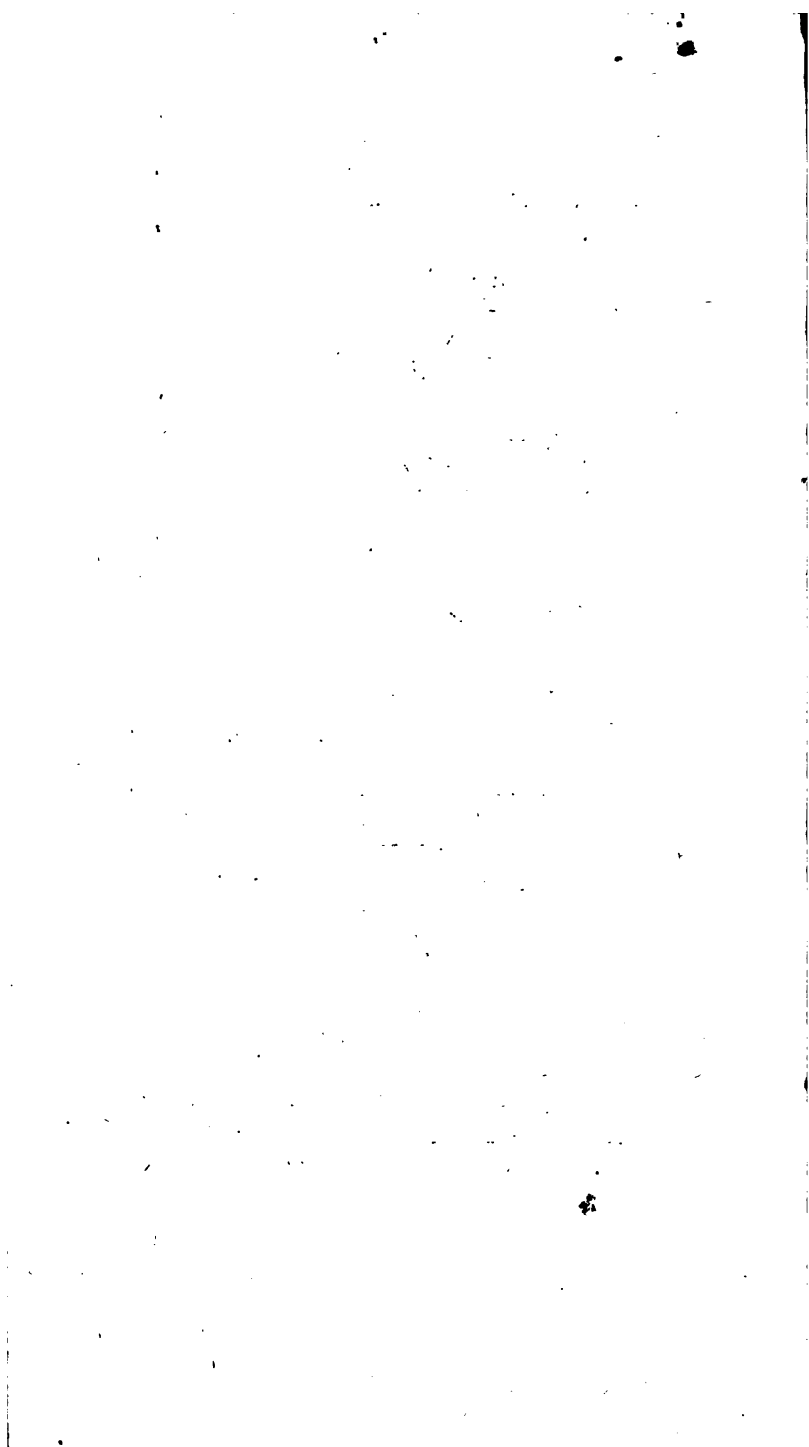


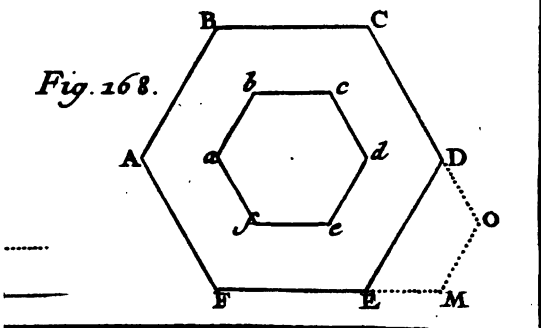
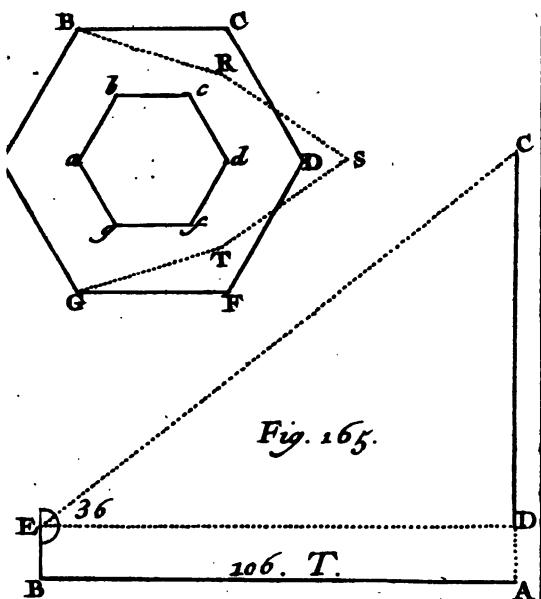


Henriest sculp.









Horis. et Sculp.



